

**Practice Integrals**

A facility with integration will help with the execution of more sophisticated problems in this and other courses in the Mathematics Tripos. This sheet is intended for self-study, and answers are given on the back. Do let me know of any errors: mgw1@cam.ac.uk.

Find the indefinite integral  $\int f(x)dx$  when  $f(x)$  is given by:

Section 1. These integrals are fundamental. If you can't do these then you should consult a text book, colleague or supervisor and learn the answers by rote.

- |         |                  |             |                    |
|---------|------------------|-------------|--------------------|
| 1) 1    | 3) $\frac{1}{x}$ | 5) $\sin x$ | 7) $\sec^2 x$      |
| 2) $2x$ | 4) $e^x$         | 6) $\cos x$ | 8) $\sec x \tan x$ |

Section 2. A little pre- or post-processing required.

- |                |                             |  |
|----------------|-----------------------------|--|
| 9) $x^2$       | 13) $\sin 3x$               | 17) $(x + 2)(x + 3)$                                   |
| 10) $e^{5x}$   | 14) $\sqrt{x^5}$            | 18) $e^{5x+3}$   |
| 11) $\sqrt{x}$ | 15) $(1 + x)^{\frac{1}{4}}$ | 19) $(x^3 - x^5)/\sqrt{x}$                             |
| 12) $x^{-1}$   | 16) $x^{1066}$              | 20) $\frac{2+x}{(1+x)^2}$ [Hint: $2 + x = 1 + x + 1$ ] |

Section 3. An obvious theme (I hope!)

- |                       |                        |                                      |
|-----------------------|------------------------|--------------------------------------|
| 21) $2x(3 + x^2)$     | 24) $xe^{x^2/2}$       | 27) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ |
| 22) $2x \sin x^2$     | 25) $x(1 - x^2)^{1/2}$ | 28) $\cot x$                         |
| 23) $\cos x \sin^3 x$ | 26) $\sec^2 x \tan x$  |                                      |

Section 4. Integration by parts.

29)  $x e^x$       30)  $x^2 \sin x$       31)  $\ln x$       32)  $e^x \sin x$

Section 5. Easy – if you know your trig. identities!

33)  $\cos x \sin^3 x$       36)  $\sin 3x \cos x$       39)  $\sin^4 x$   
34)  $\sin^3 x$       37)  $\sin 2x \sin x$       40)  $\sec^4 x$   
35)  $\cos^2 x$       38)  $2 \sin x \cos x$       41)  $\sin^2 x \cos^3 x$

Section 6. Partial fractions and division (Beware the Jabberwock)

42)  $\frac{1}{1-x}$       44)  $\frac{x}{(1-x)(2-x)}$       46)  $\frac{2x^2}{1-x^2}$       48)  $\frac{x^2}{1+x^3}$   
43)  $\frac{1}{(1-x)(2-x)}$       45)  $\frac{4}{4-x^2}$       47)  $\frac{2x^3}{1-x^2}$       49)  $\frac{1}{x^2(1-x^2)}$

Section 7. Substitution is often a good thing.

50)  $\sqrt{1+x}$       53)  $\sqrt{1-x^2}$       56)  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$   
51)  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$       54)  $\sin \sqrt{1-x}$       57)  $\frac{1}{1-x^2}$   
52)  $\frac{1}{1+x^2}$       55)  $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

Section 8. Miscellaneous – How imaginative are you?

58)  $\frac{2x+1}{x^2+x-6}$       59)  $\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$   
60)  $\frac{2-x}{\sqrt{2x-x^2}}$       61)  $\frac{1+2x}{(1+x^2)(2-x)}$   
62)  $\frac{4+2x}{\sqrt{4-x^2}}$       63)  $\frac{2}{1-x^4}$   
64)  $\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$       65a)  $\frac{4x}{4+x^4}$   
65b)  $\frac{4x}{4+x^4}$  using the substitution  $4+x^4 = (2+2x+x^2)(2-2x+x^2)$ .  
66)  $\sqrt{\tan x}$  – Only for the most ambitious. (Solving (65b) might help.)

## Practice Integrals – Solutions

All answers should include a constant of integration.

- 1)  $x$             2)  $x^2$             3)  $\ln x$             4)  $e^x$             5)  $-\cos x$         6)  $\sin x$
- 7)  $\tan x$         8)  $\sec x$         9)  $\frac{1}{3}x^3$         10)  $\frac{1}{5}e^{5x}$         11)  $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$         12)  $\ln x$
- 13)  $-\frac{1}{3}\cos 3x$     14)  $\frac{2}{7}\sqrt{x^7}$     15)  $\frac{4}{5}(1+x)^{5/4}$     16)  $\frac{x^{1067}}{1067}$     17)  $\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x$
- 18)  $\frac{1}{5}e^{5x+3}$     19)  $\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{2}{11}x^{11/2}$     20)  $\ln(1+x) - (1+x)^{-1}$     21)  $\frac{1}{2}(3+x^2)^2$
- 22)  $-\cos x^2$     23)  $\frac{1}{4}\sin^4 x$     24)  $e^{x^2/2}$     25)  $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$     26)  $\frac{1}{2}\tan^2 x$
- 27)  $-\ln \cos x$     28)  $\ln \sin x$         29)  $xe^x - e^x$         30)  $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$
- 31)  $x \ln x - x$     32)  $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$     33)  $\frac{1}{4}\sin^4 x$     34)  $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$
- 35)  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$     36)  $-\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x$     37)  $\frac{2}{3}\sin^3 x$     38)  $\sin^2 x$
- 39)  $\frac{1}{32}(12x - 8\sin 2x + \sin 4x)$     40)  $\tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x$     41)  $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x$
- 42)  $-\ln(1-x)$         43)  $\ln \left[ \frac{2-x}{1-x} \right]$         44)  $\ln \left[ \frac{(2-x)^2}{1-x} \right]$         45)  $\ln \left[ \frac{2+x}{2-x} \right]$
- 46)  $-2x + \ln \left[ \frac{1+x}{1-x} \right]$         47)  $-x^2 - \ln(1-x^2)$         48)  $\frac{1}{3}\ln(1+x^3)$
- 49)  $-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln \left[ \frac{1+x}{1-x} \right]$     50)  $\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}$     51)  $\sin^{-1} x$     52)  $\tan^{-1} x$
- 53)  $\frac{1}{2}\sin^{-1} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$     54)  $2(u \cos u - \sin u) [u = \sqrt{1-x}]$     55)  $-\sin^{-1}(1-x)$
- 56)  $-(1-x^2)^{1/2}$         57)  $\frac{1}{2}\ln \left[ \frac{1+x}{1-x} \right]$         58)  $\ln(x^2 + x - 6)$         59)  $\sqrt{2x-x^2}$
- 60)  $\sqrt{2x-x^2} - \sin^{-1}(1-x)$     61)  $\frac{1}{2}\ln \left[ \frac{1+x^2}{(2-x)^2} \right]$     62)  $4\sin^{-1} \frac{x}{2} - 2\sqrt{4-x^2}$
- 63)  $\frac{1}{2}\ln \left[ \frac{1+x}{1-x} \right] + \tan^{-1} x$     64)  $-\sqrt{2x-x^2} - \sin^{-1}(1-x)$     65)  $-\tan^{-1} \left( \frac{2}{x^2} \right)$
- 66) A little too cumbersome to present here! Compare notes with a friend.