Matemáticas Especiales
(Física Médica)

Sucesiones y Series

R. Rossignoli
Universidad Nacional de La Plata

5.1 Sucesiones

Una sucesión es un conjunto de números reales

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{1}$$

donde a_n está definido para todo n natural. Una sucesión es equivalente a una función f cuyo dominio es *el conjunto de los números naturales*, si identificamos $a_n = f(n)$. Por ejemplo, si $a_n = n$, obtenemos la sucesión de números naturales $1, 2, 3\ldots$, si $a_n = \frac{1}{n}$, obtenemos la sucesión de los inversos $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$. y si $a_n = r^n$, con $r \in \Re$ y $n \geq 0$, se obtiene la *sucesión geométrica*

$$1, r, r^2, \ldots, r^n, \ldots$$

La expresión para a_n puede estar dada también por una relación *recursiva*,

$$a_{n+1} = f(a_n)\,, \tag{2}$$

con un valor inicial a_1, donde f es una cierta función. Se obtiene así la sucesión $a_1, f(a_1), f(f(a_1)), f(f(f(a_1))), \ldots$. Por ejemplo, $a_{n+1} = 1 + a_n$, con $a_1 = 1$, es la sucesión de números naturales $a_n = n$. Si $a_{n+1} = ra_n$, $a_1 = 1$, se obtiene la sucesión *geométrica.* Si $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$, con $a_1 = 1$, se obtiene la sucesión

$$1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, \ldots \tag{3}$$

En el caso más general la función que define la relación recursiva puede también depender de n y de los términos anteriores, es decir, $a_n = f_n(a_1, \ldots, a_{n-1})$.

El *límite* de una sucesión, si existe, es el valor al cual se aproxima a_n para $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{si} \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon \ \text{ tal que si } \ n > n_\varepsilon, \quad |a_n - L| < \varepsilon$$

es decir, $a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ si $n > n_\varepsilon$. En este caso se dice que la sucesión es *convergente.*
Para dos sucesiones convergentes, con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_b$, es fácil mostrar que:
$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L_a + L_b$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = L_a L_b$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n/b_n = L_a/L_b$ (si $L_b \neq 0$).
Si $a_n \leq b_n\ \forall\ n > n_0 \Rightarrow L_a \leq L_b$.
Si $a_n = f(n)$, con f definida en $(0, \infty)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

El límite de una sucesión es $+\infty$ si a_n toma valores arbitrariamente grandes cuando n crece:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \text{si} \quad \forall R > 0,\ \exists\ n_R \ \text{ tal que si } \ n > n_R, \quad a_n > R$$

Analogamente, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ corresponde al caso en que a_n toma valores arbitrariamente grandes pero negativos cuando n crece. El comportamiento de a_n para n grande puede ser también oscilante o errático, en cuyo caso el límite no existe.
Por ejemplo, $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, mientras que $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \nexists$. Para $a_n = r^n$ obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & |r| < 1 \\ 1 & r = 1 \\ +\infty & r > 1 \\ \nexists & r \leq -1 \end{cases}$$

Para sucesiones que dependen de funciones no directamente generalizables a argumentos reales, tales como $n!$, es útil el sig. resultado:
Si $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = r \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = \begin{cases} 0 & 0 \leq r < 1 \\ \infty & r > 1 \end{cases}$.
En efecto, $\forall\ n > n_\varepsilon$, $||\frac{a_{n+1}}{a_n}| - r| < \varepsilon$ y entonces, si $0 \leq r < 1$, $|a_{n+1}| \leq s|a_n|$, con $s = r + \varepsilon < 1$ para ε suf. pequeño. Se obtiene así $|a_{n+k}| \leq s^k |a_n|$ y por lo tanto $\lim_{k\to\infty} |a_{n+k}| = 0$, lo que implica $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. En cambio, si $r > 1$, $|a_{n+1}| \geq s|a_n|$, con $s = r - \varepsilon > 1$. En tal caso $|a_{n+k}| > s^k |a_n|$ y $\lim_{k\to\infty} |a_{n+k}| = \infty$, lo que implica $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.

Ejemplo: Hallar $\lim_{n\to\infty} b^n/n!$, con $b \neq 0$.
Se tiene $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n+1} = 0\ \forall\ b \in \Re$, por lo que $\lim_{n\to\infty} b^n/n! = 0$.
El resultado anterior puede obtenerse también directamente.

Notemos que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ (finito), también $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = L$ por lo que

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = L - L = 0 \tag{4}$$

La diferencia entre dos términos sucesivos de una sucesión convergente debe pues tender a 0 para n grande (condición *necesaria*). En una sucesión convergente de la forma (2), con f *continua*, esto implica que $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = f(L)$. El límite, si existe, debe pues satisfacer

$$L = f(L) \tag{5}$$

Ejemplo: La sucesión (3) es convergente, como probaremos en breve. El límite se obtiene pues de la ecuación $L = 1 + \frac{1}{1+L}$, es decir, $L(1+L) = 2 + L$ o, $L^2 = 2$. Se obtiene $L = \pm\sqrt{2}$. Como $a_n > 0$, el límite debe ser $L = \sqrt{2}$.

Una sucesión es *creciente* si $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n$ y *decreciente* si $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n$. Se dice que una sucesión es *monótona* si es o bien creciente o decreciente.

Una sucesión es *acotada* si $|a_n| \leq K$ $\forall n$, con K un número real ≥ 0.
Un resultado importante relativo a los números reales es que toda sucesión *monótona y acotada* de números reales es *convergente*, a un número real L. Es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Lo mismo ocurre si es mónotona a partir de un cierto n.

Ejemplo 1: Mostrar que la sucesión

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}, \quad a_1 = 1$$

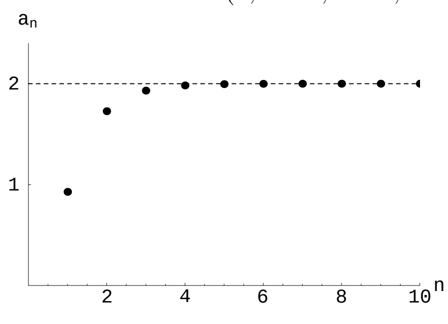
es convergente, con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.
Mostraremos primero que es acotada y creciente.
Asumiendo que $a_n \leq 2$, tenemos $a_n + 2 \leq 4$ y por lo tanto, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \leq \sqrt{4} = 2$.
Como $a_1 \leq 2$, la relación $a_n \leq 2$ vale $\forall n \geq 1$. Como además $a_n \geq 0$ $\forall n$, la sucesión es *acotada.*

Notemos ahora que $f(x) = \sqrt{x+2}$ es una función *creciente* para $x \geq -2$. Asumiendo que $a_{n+1} \geq a_n$, obtenemos pues $a_{n+2} = f(a_{n+1}) \geq f(a_n) = a_{n+1}$, es decir, $a_{n+2} \geq a_{n+1}$. Como $a_2 = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} > a_1$, vemos que la sucesión es *creciente* $\forall$ n. La sucesión, siendo acotada y creciente, es pues *convergente.*

Para hallar el límite L, utilizamos la relación (5):

$$L = \sqrt{L+2} \quad \Rightarrow \quad L^2 - L - 2 = 0$$

La ecuación cuadrática posee las soluciones $L = 2$ y $L = -1$, pero sólo $L = 2$ es solución de $L = \sqrt{L+2}$. El límite es pues $L = 2$. Los primeros términos son $(1, 1.732, 1.932, 1.983, 1.996, 1.999, \ldots)$.

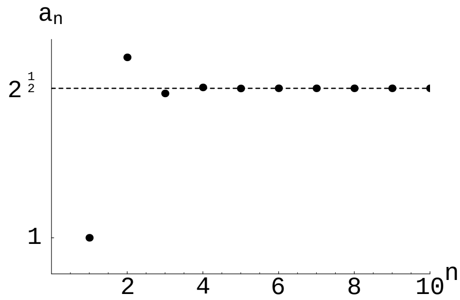


Ejemplo 2: Consideremos ahora la sucesión (3), donde $f(x) = 1 + 1/(1+x)$. La sucesión no es monótona, pues $a_2 > a_1$, $a_3 < a_2$, y en general $a_{n+1} > a_n$ si n impar y $a_{n+1} < a_n$ si n par. No obstante, podemos considerar la sucesión de los términos pares e impares por separado.

$$a_{n+2} = g(a_n), \quad g(a_n) = f(f(a_n)) = \frac{1}{2 + \frac{1}{1+a_n}} = \frac{4 + 3a_n}{3 + 2a_n}$$

con término inicial $a_1 = 1$ para la sucesión impar y $a_2 = f(a_1) = 3/2$ para la sucesión par.
La función $g(x) = \frac{4+3x}{3+2x}$ es *creciente* para $x > -3/2$, pues $g'(x) = 1/(3+2x)^2 > 0$.

Como $a_3 = g(a_1) = 7/5 \geq a_1$, asumiendo $a_{n+2} \geq a_n$ obtenemos $a_{n+4} = g(a_{n+2}) \geq g(a_n) = a_{n+2}$, pues g es creciente. La sucesión de términos impares es pues *creciente.*
Además, como $g(x)$ es creciente y $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \frac{3}{2}$, tenemos $a_1 \leq a_n \leq 3/2\ \forall\ n$ impar.
Siendo creciente y acotada, la sucesión de impares es pues *convergente.*
Como $a_4 = g(a_2) = 17/12 \leq a_2$, asumiendo $a_{n+2} \leq a_n$ obtenemos $a_{n+4} = g(a_{n+2}) \leq g(a_n) = a_{n+2}$. La sucesión de términos pares es pues *decreciente.* Además, es acotada pues $g(x) \geq 0$ si $x > 0$, por lo que $0 \leq a_n \leq a_2\ \forall\ n$ par. La sucesión de pares es pues también *convergente.*
El límite de ambas sucesiones se obtiene de la ecuación $L = g(L)$, cuyas soluciones son $L = \pm\sqrt{2}$. Como $a_n > 0\ \forall\ n$, el límite de ambas sucesiones es $L = +\sqrt{2}$. La sucesión original converge pues a $L = \sqrt{2} = 1.41421\ldots$, como habíamos mostrado. Los primeros términos son $1., 1.5, 1.4, 1.41667, 1, 41379\ldots\ldots$.



Se muestra en la siguiente figura el esquema gráfico de convergencia de una sucesión $a_{n+1} = f(a_n)$, con límite L, correspondiente a una función $f(x)$ creciente (izquierda), como en el ej. 1, y decreciente (derecha), como en el ej. 2. La ec. (5) representa la intersección de las curvas $y = f(x)$ y $y = x$.

Si f es derivable y x está próximo al límite $L = f(L)$, podemos aproximar $f(x)$ por la *recta tangente*,

$$f(x) \approx f(L) + f'(L)(x - L) = L + f'(L)(x - L)$$

(aproximación lineal). Para a_n próximo a L obtenemos pues $a_{n+1} = f(a_n) \approx L + f'(L)(a_n - L)$, o sea,

$$a_{n+1} - L \approx f'(L)(a_n - L),$$

lo que consituye una sucesión *geométrica* de razón $f'(L)$ para la diferencia $a_n - L$ (es decir, $a_{n+k} - L \approx [f'(L)]^k(a_n - L)$). Esta converge a 0 si $|f'(L)| < 1$. Se concluye que para a_1 suficientemente próximo (pero distinto) a L, la sucesión $a_{n+1} = f(a_n)$ convergerá a L si $|f'(L)| < 1$, pero tenderá a alejarse de L si $|f'(L)| > 1$. La convergencia es monótona si $0 \leq f'(L) < 1$ y alternada si $-1 < f'(L) < 0$.
En el ej. 1 ($f(x) = \sqrt{2+x}$, $L = 2$), $f'(L) = \frac{1}{2\sqrt{2+L}} = \frac{1}{4}$, mientras que en el ej. 2 ($f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$, $L = \sqrt{2}$) $f'(L) = -\frac{1}{(1+L)^2} = -\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}$. En ambos casos se verifica $|f'(L)| < 1$.

Un sucesión famosa es

$$a_{n+1} = ka_n(1 - a_n), \quad 0 < a_1 < 1, \quad 0 < k < 4$$

que surge en diversos contextos (economía, ecología, etc.). La sucesión es acotada pues si $f(x) = kx(1-x)$, $0 < f(x) \leq k/4 < 1\ \forall\ x \in (0, 1)$. La ecuación $L = f(L)$ conduce a los posibles limites $L = 0$ o $L = 1 - 1/k$.
Si $0 < k \leq 1 \Rightarrow L = 0\ \forall\ a_1 \in (0, 1)$. En este caso, $f'(L) = k \leq 1$.
Si $1 < k \leq 3 \Rightarrow L = 1 - 1/k\ \forall\ a_1 \in (0, 1)$. En este caso, $f'(L) = 2 - k$, con $|f'(L)| \leq 1$.
Si $3 < k < 4$, el límite de la sucesión *no existe*, excepto para valores particulares de a_1. Si $3 < k \lesssim 3,6$, a_n exhibe para n grande un comportamiento *oscilatorio*, alternando entre dos valores fijos si $k \lesssim 3,45$, entre 4 valores si $3,45 \lesssim k \lesssim 3,55$, etc. En cambio, si $3.6 \lesssim k < 4$, el comportamiento de a_n se torna *caótico*, es decir, errático, sin oscilaciones fijas. En este caso, a_n depende fuertemente del valor inicial a_1 aún para n grande.

5.2 Series

Dada una sucesión $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$, podemos formar la sucesión de *sumas parciales*

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

A tal sucesión se la denomina *serie*. La *suma* de la serie es *el límite de la sucesión de sumas parciales*, si este límite existe:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Si el límite anterior es ∞ o no existe, se dice que la serie *diverge* (o no converge).

Condición necesaria (pero no suficiente) para convergencia: Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge*, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{6}$$

En otras palabras, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ es distinto de 0 o no existe, la serie *no converge*. Esto resulta obvio a partir de (4), ya que $S_n - S_{n-1} = a_n$. Si la serie converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0$, que equivale a (6).

Ejemplo: Consideremos la sucesión de números naturales $a_n = n$, $n \geq 1$. Las sumas parciales son

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + n = n(1+n)/2$$

La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ obviamente diverge ($\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$), lo que puede verse de (6) pues $\lim\limits_{n\to\infty} n \neq 0$.
A partir de la expresión de S_n, es posible obtener a_n como $a_n = S_n - S_{n-1}$. Por ej., $\frac{n(1+n)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = n$.

Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series *convergentes*, se verifican fácilmente las siguientes propiedades:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

5.2.1 Serie geométrica

La *serie geométrica* es la sucesión de sumas parciales asociada a la sucesión geométrica, dadas por

$$S_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \sum_{k=0}^{n} r^k$$

Estas pueden evaluarse explícitamente. Multiplicando S_n por r, obtenemos

$$rS_n = r + r^2 + \ldots + r^{n+1}$$

Restando,

$$rS_n - S_n = (1-r)S_n = 1 + r + \ldots r^n - (r + r^2 + \ldots r^{n+1}) = 1 - r^{n+1}$$

obteniéndose, si $r \neq 1$,

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}. \quad r \neq 1 \tag{7}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1-r}, \qquad |r| < 1$$

de modo que la serie *converge* si $|r| < 1$. Si $r > 1$ o $r \leq -1$, el límite de (7) es ∞ o no existe, por lo que la serie *no converge*. Si $r = 1$, $S_n = 1 + 1^1 + \ldots + 1^n = n + 1$, con $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, por lo que la serie tampoco converge. Esto está de acuerdo con (6), pues si $|r| \geq 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.
La serie geométrica converge pues *si y sólo si* $|r| < 1$.

Ejemplos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\tfrac{1}{2})^n=\frac{1}{1-1/2}=2,\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-\tfrac{1}{2})^n=\frac{1}{1+1/2}=\frac{2}{3}.$$

En general, si $|r|<1$ y $m\geq 0$,

$$ar^m+ar^{m+1}+ar^{m+2}+\ldots=\sum_{n=m}^{\infty}ar^n=ar^m\sum_{n=0}^{\infty}r^n=\frac{ar^m}{1-r}.$$

donde ar^m representa *el primer término de la serie.*
Por ejemplo, $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{5^n}=-2\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{(-2)^n}{5^n}=-2(\frac{-2}{5})^4\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{-2}{5})^n=-2\frac{(2/5)^4}{1+(2/5)}$.
El error cometido al estimar la suma de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}r^n$ con n términos es

$$\frac{1}{1-r}-S_n=\frac{r^{n+1}}{1-r}$$

Para obtener un error $<\varepsilon$, se necesita n tal que $|\frac{r^{n+1}}{1-r}|\leq\varepsilon$, es decir, $n\geq\frac{\ln[\varepsilon(1-r)]}{\ln|r|}-1$. Si $\varepsilon=10^{-3}$, $n\geq 10$ para $r=\frac{1}{2}$, mientras que $n\geq 1145$ para $r=0.99$.

La serie geométrica surge frecuentemente en diversas aplicaciones. Por ejemplo, si todos los meses se deposita en una cuenta el 90% de lo depositado el mes pasado, con un depósito inicial de $a_1=a$ pesos, el monto depositado en el segundo mes es $a_2=ra_1=ra$, con $r=0,9$, en el tercer mes es $a_3=ra_2=r^2a$ y en el mes enésimo es $a_n=ra_{n-1}=r^{n-1}a$. El monto total depositado al cabo de n meses es

$$S_n=a(1+r+r^2+\ldots+r^{n-1})=a\frac{1-r^n}{1-r}$$

el cual nunca podrá superar el límite $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-r}=10a$.

Otro caso es el de una pelota que se deja caer desde una altura h_0, y que rebota hasta una altura $h_1=rh_0$, con $0<r<1$. La altura alcanzada despues de n rebotes es $h_n=rh_{n-1}=r^2h_{n-2}=\ldots=r^nh_0$. La distancia total recorrida después de n rebotes es

$$h_0+2h_1+2h_2+\ldots+2h_n=h_0[1+2(r+r^2+\ldots+r^n)]=h_0[1+2\frac{r(1-r^n)}{1-r}]$$

La distancia total recorrida hasta detenerse ($n\to\infty$) permanece pues *finita*:

$$H=\lim_{n\to\infty}h_0[1+\frac{2r(1-r^n)}{1-r}]=h_0[1+\frac{2r}{1-r}]=h_0\frac{1+r}{1-r}$$

Si $r=0$, la pelota se detiene al primer rebote y $H=h_0$. Si $r\to 1^-$, $H\to\infty$.
El tiempo de caída desde una altura h es $\sqrt{2h/g}$ donde $g=9.8m/s^2$ es la aceleración de la gravedad (dado que g constante, la altura en función del tiempo de cualquier objeto que se deja caer desde una altura h_0 es $h(t)=h_0-\frac{1}{2}gt^2$. Por lo tanto, $h(t)=0$ cuando $t=\sqrt{2h_0/g}$. El tiempo necesario para llegar a esa altura desde el piso es el mismo). El tiempo de caída desde la altura h_n es pues

$$t_n=\sqrt{2h_n/g}=\sqrt{2r^nh_0/g}=\sqrt{2h_0/g}(\sqrt{r})^n=t_0\alpha^n$$

donde $t_0=\sqrt{2h_0/g}$, $\alpha=\sqrt{r}$. El tiempo total transcurrido despues de n rebotes es

$$t_0+2t_1+2t_2+\ldots+2t_n=t_0[1+2(\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^n)]=t_0[1+2\frac{\alpha(1-\alpha^n)}{1-\alpha}]$$

y el tiempo total transcurrido hasta detenerse es (nótese que si $0<r<1\Rightarrow 0<r<\alpha<1$)

$$T=\lim_{n\to\infty}t_0[1+2\frac{\alpha(1-\alpha^n)}{1-\alpha}]=t_0[\frac{1+\alpha}{1-\alpha}]=t_0\frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}$$

Como $\alpha=\sqrt{r}>r$, $T/t_0>H/h_0$, pues $\frac{1+x}{1-x}$ es una función creciente de x para $x\in[0,1]$.

5.2.2 Series con términos positivos

Consideremos una serie en la que $a_n \geq 0 \; \forall n$. Las sumas parciales son entonces positivas y crecientes:

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n \geq 0, \qquad S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$$

Una condición *suficiente* para la convergencia es pues que S_n este *acotada* $\forall n$, es decir, que $S_n \leq C$ $\forall n$. En efecto, al ser S_n creciente y estar acotada, S_n no puede oscilar ni tomar valores arbitrariamente grandes para $n \to \infty$, por lo que S_n se aproxima necesariamente a un límite finito (en el conjunto de números reales) que es la mínima cota superior de los S_n. Por otro lado, si la serie diverge, entonces $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \infty$.

Ejemplo: Probaremos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^2} &= 1 + (\tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2}) + (\tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{6^2} + \tfrac{1}{7^2}) + \ldots \\
&\leq 1 + (\tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^2}) + (\tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{4^2}) + \ldots = 1 + \tfrac{2}{2^2} + \tfrac{4}{4^2} + \ldots = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \ldots \leq \tfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2
\end{aligned}$$

es decir, $\sum\limits_{n=1}^{2^m-1} \frac{1}{n^2} \leq \sum\limits_{n=0}^{m-1} \frac{1}{2^n} \leq 2$. Al estar todas las sumas parciales acotadas por la serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$, la serie *converge*.

Ejemplo : Probaremos ahora que la serie (denominada serie armónica)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverge, a pesar de que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Tenemos

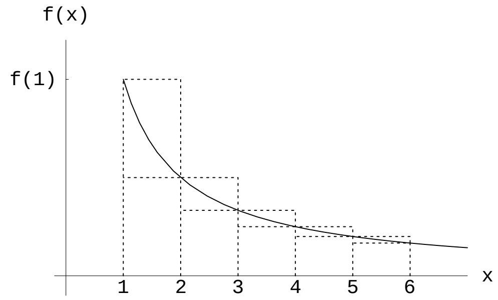
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} &= 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}) + \ldots \\
&\geq 1 + \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}) + \ldots = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{4} + \tfrac{4}{8} + \ldots = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \ldots
\end{aligned}$$

es decir, $\sum\limits_{n=1}^{2^m} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{m}{2}$, lo que muestra que la serie diverge.

5.2.3 Criterio de la integral y estimación de series

Existe una estrecha relación entre una serie y la integral impropia correspondiente. Sea $f(x)$ una función *contínua, positiva y decreciente* en el intervalo $[1, \infty)$. Mostraremos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(n) \quad \textit{converge si y sólo si} \quad \int_1^{\infty} f(x)dx \quad \textit{converge}$$



A partir de la figura, podemos inferir la siguiente cadena de desigualdades para $n > 1$:

$$f(2) + \ldots + f(n) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(1) + \ldots + f(n-1) \tag{8}$$

ya que la primer suma es el área de los rectángulos inscriptos situados bajo la curva entre $x = 1$ y $x = n$, y la segunda la de los rectángulos circunscriptos situados sobre la curva entre $x = 1$ y $x = n$.

Si $\int_1^n f(x)dx$ converge para $n \to \infty$, entonces la primer suma permanece acotada $\forall n$, siendo entonces *convergente* para $n \to \infty$ por ser *creciente* con n. Analogamente, si la segunda suma converge para $n \to \infty$, $I(n) \equiv \int_1^n f(x)dx$ permanece acotada para $n \to \infty$, siendo entonces *convergente* por ser $I(n)$ *creciente* con n. Como además, para un número real r arbitrario, $I(r) = \int_1^r f(x)dx \leq \int_1^n f(x)dx$ si $n \geq r$, entonces $I(r)$ también converge para $r \to \infty$. Para $n \to \infty$ se cumple entonces

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{9}$$

si la serie o la integral converge. Esto implica también

$$\int_2^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)dx \tag{10}$$

El criterio puede también aplicarse si las hipótesis se cumplen sólo para $n \geq n_0 \geq 1$, pues la convergencia de la serie y la integral dependen del comportamiento de $f(x)$ para x grande. En este caso, para $n > n_0$,

$$f(n_0 + 1) + \ldots + f(n) \leq \int_{n_0}^n f(x)dx \leq f(n_0) + \ldots + f(n-1)$$

y, si $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ converge,

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} f(n) \leq \int_{n_0}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$$

El método presente sirve también para *estimar* el error cometido al aproximar una serie *convergente* por una suma finita. Escribiendo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum\limits_{n=1}^{n_0} f(n) + \sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} f(n)$, el último término satisface, si las hipótesis se cumplen al menos para $n \geq n_0$,

$$\int_{n_0+1}^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} f(n) \leq \int_{n_0}^{\infty} f(x)dx \tag{11}$$

En general, el punto medio del intervalo anterior es una buena estimación del error para n_0 grande, por lo que podemos escribir, en forma aproximada,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \approx \sum_{n=1}^{n_0} f(n) + \int_{n_0+1}^{\infty} f(x)dx + \tfrac{1}{2} \int_{n_0}^{n_0+1} f(x)dx \tag{12}$$

Ejemplo 1: Estudiar la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$$

Para $\alpha \leq 0$ la serie diverge por razones obvias ($\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$). Para $\alpha > 0$, podemos aplicar el criterio de la integral pues en tal caso $f(x) = 1/x^{\alpha}$ es positiva y decreciente para $x > 0$. Como

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx = \lim_{r\to\infty}\int_1^{r}\frac{1}{x^{\alpha}}dx = \begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}, & \alpha>1\\ \infty & 0<\alpha\leq 1\end{cases}$$

(recordar integrales impropias hechas en clase) la serie *converge para* $\alpha > 1$ *y diverge* $\forall\ \alpha \leq 1$.

De esta forma, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ *convergen*, mientras que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$ *divergen.*

La función

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}},\quad \alpha > 1$$

se denomina *función zeta de Riemann* y posee importantes aplicaciones. Algunos valores son: $\zeta(2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = 1,64493\ldots$, $\zeta(4) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \approx 1,08232\ldots$. Utilizando (10) y notando que $\zeta(\alpha) = 1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, obtenemos

$$1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}(\alpha-1)} \leq \zeta(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha-1} + 1\,,\qquad \alpha > 1$$

de modo que $\lim\limits_{\alpha\to 1^+}\zeta(\alpha) = +\infty$. Puede probarse que para $\alpha \to 1^+$, $\zeta(\alpha) \approx \frac{1}{\alpha-1} + 0.577$.

Ejemplo 2: Hallar el error al estimar $\zeta(2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ mediante una suma de 10 y 20 términos.

Obtenemos $\sum\limits_{n=1}^{10}\frac{1}{n^2} = 1,54977\ldots$, $\sum\limits_{n=1}^{20}\frac{1}{n^2} = 1,59616\ldots$.

Utilizando (11) y $\int_{n_0}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{n_0}$, el error $R_{n_0} = \zeta(2) - \sum\limits_{n=1}^{n_0}\frac{1}{n^2}$ satisface

$$\frac{1}{n_0+1} \leq R_{n_0} \leq \frac{1}{n_0}$$

es decir $0,09 \leq R_{10} \leq 0,1$ y $0,0476 \leq R_{20} \leq 0,05$. La estimación mejorada (12) resulta en este caso

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \approx \sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n_0+1} + \tfrac{1}{2}[\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0+1}] = \sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{n^2} + \tfrac{1}{2}[\frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0}]$$

que da como resultado $1,64522\ldots$ para $n_0 = 10$ y $1,64497\ldots$ para $n_0 = 20$. Los errores son ahora mucho menores: $\approx 0,0003$ para $n_0 = 10$ y $\approx 0,00004$ para $n_0 = 20$.

Ejemplo 3: Estudiar la convergencia de

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^{\alpha}},\quad \alpha > 0$$

La función $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$ es positiva y decreciente para $x \geq 2$. Obenemos, sustituyendo $u = \ln(x)$, $du = \frac{1}{x}dx$,

$$\lim_{r\to\infty}\int_2^{r}\frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}dx = \lim_{r\to\infty}\int_{\ln(2)}^{r}\frac{1}{u^{\alpha}}du = \begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(\ln(2))^{\alpha-1}}, & \alpha>1\\ \infty & 0<\alpha\leq 1\end{cases}$$

de modo que la serie converge para $\alpha > 1$ y diverge para $0 < \alpha \leq 1$.

Ejemplo 4: Estimar cuantos términos se necesitan para que $\sum\limits_{n=1}^{m} \frac{1}{n} > M$, con $M = 10$ y $M = 100$.

Tenemos, por (8),

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \geq \int_{1}^{m+1} \frac{1}{x} dx = \ln(m+1)$$

de donde si, $\ln(m+1) > M \Rightarrow m > e^M - 1$. Para $M = 10$, $m > 22025$ mientras que para $M = 100$, $m > 2,688 \times 10^{43}$, lo que indica la "lentitud" de la divergencia. En realidad, estas estimaciones son seguras pero algo grandes. A partir de

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \leq \int_{1}^{m} \frac{1}{x} dx + 1 = \ln(m) + 1$$

obtenemos que m no puede ser menor a e^{M-1}, es decir, 8.103 para $M = 10$ y $9,89 \times 10^{42}$ para $M = 100$. En general,

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} = \gamma + \psi(m+1), \qquad \gamma = \lim_{m \to \infty} (\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} - \ln m) \approx 0,577$$

donde γ es la constante de Euler y $\psi(z) = \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz} = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ la derivada logaritmica de la función *Gamma* (véase sección 3.5), denominada función *Digamma*. Se obtiene entonces la cota inferior exacta $m > \psi^{-1}(M - \gamma) - 1$ (ψ^{-1} denota la función inversa), obteniéndose $m > 12367$ para $M = 10$ y $m > 1.51 \times 10^{43}$ para $M = 100$.

5.2.4 Criterio de comparación

Consideremos las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \qquad a_n \geq 0, \qquad b_n \geq 0 \tag{13}$$

y supongamos que existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$a_n \leq b_n \qquad \forall\, n \geq n_0$$

Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge*. Recíprocamente, si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge*.
Demostración: Supongamos primero $n_0 = 1$. Entonces

$$a_1 + \ldots + a_n \leq b_1 + \ldots + b_n$$

Por lo tanto, si $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_n$ es finito, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ permanece acotada $\forall n$, siendo entonces convergente para $n \to \infty$ por ser creciente con n. Se verifica entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Si $n_0 > 1$, la demostración es similar. Para $n > n_0$,

$$a_1 + \ldots + a_{n_0-1} + a_{n_0} + \ldots + a_n \leq a_1 + \ldots + a_{n_0-1} + b_{n_0} + \ldots + b_n = \sum_{k=1}^{n_0-1}(a_k - b_k) + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Por lo tanto, dado que $\sum\limits_{k=1}^{n_0-1}(a_k - b_k)$ es una suma finita, si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge y se verifica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{n_0-1}(a_n - b_n) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Este criterio es de fundamental importancia práctica para determinar la convergencia de series. Existe otra formulación del mismo que resulta muy conveniente: Para series del tipo (13) con $b_n > 0$,

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \textit{ambas series convergen o divergen} \tag{14}$$

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge } \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \;\; \textit{converge} \tag{15}$$

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge } \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \;\; \textit{diverge} \tag{16}$$

Para demostrar (14), $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ implica que $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_\varepsilon$ t.q. si $n > n_\varepsilon$, $|a_n/b_n - L| < \varepsilon$. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}L$, obtenemos, para $n > n_\varepsilon$,

$$|\frac{a_n}{b_n} - L| < \tfrac{1}{2}L \;\;\Rightarrow\;\; \tfrac{1}{2}L \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \tfrac{3}{2}L \;\;\Rightarrow\;\; \tfrac{1}{2}Lb_n \leq a_n \leq \tfrac{3}{2}Lb_n$$

Por el criterio de comparación, de $a_n \leq \frac{3}{2}Lb_n$ se deduce que si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge mientras que de $\frac{1}{2}Lb_n \leq a_n$ se deduce que si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
Para demostrar (15), se procede en forma similar. El límite implica que $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_\varepsilon$ t.q. si $n > n_\varepsilon$, $|a_n/b_n| = a_n/b_n < \varepsilon$. Por lo tanto, para $n > n_\varepsilon$, $a_n < \varepsilon b_n$, de donde si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
Finalmente, para demostrar (16), el límite implica que $\forall\, M > 0\; \exists\, n_M$ t.q. si $n > n_M$, $a_n/b_n > M$. Por lo tanto, para $n > n_M$, $a_n > Mb_n$, de donde, si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ también diverge.

Ejemplo 1: Determinar si converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n}{n^4 + 3n + 2}$$

La serie *converge*, pues para n grande a_n se comporta como $1/n^2$. Para ver esto en detalle, escribimos

$$\frac{n^2+2n}{n^4+3n+2}=\frac{n^2(1+2/n)}{n^4(1+3/n^3+2/n^4)}=\frac{1+2/n}{n^2(1+3/n^3+2/n^4)}\leq\frac{3}{n^2}$$

para $n\geq 1$. Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, entonces la serie converge. Esto puede verse también utilizando (14):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{n^4+3n+2}/\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n^2+2n)}{n^4+3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2/n}{1+3/n^3+2/n^4}=1$$

Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, la serie converge.

Ejemplo 2: Determinar si converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{n^3+3n+2}$$

La serie *no converge*, pues para n grande, a_n se comporta como $1/n$. Para ver esto en detalle, escribimos

$$\frac{n^2+2n}{n^3+3n+2}=\frac{n^2(1+2/n)}{n^3(1+3/n^2+2/n^3)}=\frac{1+2/n}{n(1+3/n^2+2/n^3)}\geq\frac{1}{6n}$$

para $n\geq 1$. Como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, entonces la serie diverge. Se llega al mismo resultado utilizando (14):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{n^3+3n+2}/\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+2n)}{n^3+3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2/n^2}{1+3/n^2+2/n^3}=1$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, la serie diverge.

Ejemplo 3: Determinar si converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^2}\tag{17}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n)/n^{\alpha}=0\ \forall\alpha>0$, para n suficientemente grande, $\ln(n)<n^{\alpha}$. Eligiendo por ejemplo $\alpha=\frac{1}{2}$, obtenemos, para n suficientemente grande,

$$\frac{\ln(n)}{n^2}<\frac{\sqrt{n}}{n^2}=\frac{1}{n^{3/2}}$$

Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge, la serie (17) también *converge*. Puede llegarse al mismo resultado utilizando (15) y comparando con la serie *convergente* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n^2}/\frac{1}{n^{3/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n^{1/2}}=0$$

Puede aplicarse también el criterio de la integral: $\int_1^{\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}dx=\int_0^{\infty}ue^{-u}du$ converge.

En general, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^{\alpha}}$$

converge $\forall\alpha>1$, pues $\ln(n)$ es menor que cualquier potencia de n para n suficientemente grande. Puede obtenerse la misma conclusión aplicando el criterio de la integral ($\int_1^{\infty}\frac{\ln(x)}{x^{\alpha}}dx=\int_0^{\infty}ue^{-(\alpha-1)u}du=\frac{1}{(\alpha-1)^2}$ si $\alpha>1$, de modo que es convergente). En cambio

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n}$$

no converge, pues $\frac{\ln(n)}{n}>\frac{1}{n}$ para $n\geq 3$.

5.2.5 Criterio de la razón

Es en realidad un caso particular del criterio de comparación. Consideremos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0,$$

Si existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$\frac{a_n+1}{a_n} \leq r < 1 \quad \forall n \geq n_0$$

entonces la serie *converge*. Por hipótesis,

$$a_{n_0+1} \leq r a_{n_0}, \quad a_{n_0+2} \leq r a_{n_0+1} \leq r^2 a_{n_0}, \qquad a_{n_0+n} \leq r a_{n_0+n-1} \leq \ldots \leq r^n a_{n_0}$$

Por lo tanto,

$$a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_{n_0+n} \leq a_{n_0}(1 + r + \ldots + r^n).$$

Para $n \to \infty$, el miembro derecho (una serie geométrica) converge a $a_{n_0}/(1-r)$. Por lo tanto, la primer suma permanece acotada para $n \to \infty$, siendo entonces convergente por ser creciente con n. Se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n + \frac{a_{n_0}}{1-r}$$

Por otro lado, si existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$\frac{a_n+1}{a_n} \geq r > 1 \quad \forall n \geq n_0$$

la serie *diverge*, pues

$$a_{n_0+1} \geq r a_{n_0}, \ ; \quad a_{n_0+2} \geq r a_{n_0+1} \geq r^2 a_{n_0}, \qquad a_{n_0+n} \geq r a_{n_0+n-1} \geq \ldots \geq r^n a_{n_0}$$

Como $r > 1$, esto implica que $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_0+n} = \infty \neq 0$, por lo que la serie es divergente.

El presente criterio se utiliza normalmente evaluando el límite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$Si \ \ 0 \leq L < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \ converge$$

pues en tal caso, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \ n_\varepsilon$ tal que si $n \geq n_\varepsilon$, $|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L| < \varepsilon$, de donde

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon < 1, \quad n \geq n_\varepsilon$$

si ε es suficientemente pequeño.

$$Si \ \ L > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \ diverge$$

pues en tal caso, de $|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L| < \varepsilon$ tenemos

$$1 < L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

para ε suficientemente pequeño. Lo mismo ocurre si $L = \infty$.

Notemos finalmente que si $L = 1$, el criterio no decide: si $a_n = 1/n$, $a_{n+1}/a_n = n/(n+1) \to 1$ para $n \to \infty$, pero $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge. En cambio, si $a_n = 1/n^2$, $a_{n+1}/a_n = n^2/(n+1)^2 \to 1$ para $n \to \infty$, pero $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ converge.

El criterio es muy conveniente cuando aparecen factoriales en la expresión de a_n.

Ejemplo 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \qquad a > 1.$$

Tenemos $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} / \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n+1}$, que tiende a 0 para $n \to \infty$ $\forall$ a. Por lo tanto, la serie *converge.* Para $0 < a < 1$ la convergencia de la serie es obvia, pues $\frac{a^n}{n!} \leq a^n$ y en este caso $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$ converge.

Podemos también aplicar directamente el criterio de comparación para $a > 1$, pues $\frac{a^n}{n!} = \frac{a...a...a}{n(n-1)...n_0(n_0-1)...1} \leq (\frac{a}{n_0})^{n-n_0} \frac{a^{n_0}}{n_0!} \leq (\frac{1}{2})^{n-n_0} \frac{a^{n_0}}{n_0!}$ eligiendo $n_0 > 2a$. Al ser menor que una serie geométrica, la serie converge.

Ejemplo 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!^2}{(2n)!}.$$

Aplicando el criterio anterior, tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n^2(1+2/n+1/n^2)}{4n^2(1+2/n)(1+1/2n)} = \frac{1}{4} \frac{1+2/n+1/n^2}{(1+2/n)(1+1/2n)}$$

Para $n \to \infty$, el cociente se aproxima a $\frac{1}{4}$, por lo que la serie *converge.*

Podemos también aplicar directamente el criterio de comparación, pues $\frac{(n!)^2}{(2n)!^2} = \frac{n!}{2n(2n-1)...(n+1)} \leq (\frac{1}{2})^n$, por lo que la serie converge.

Ejemplo 3:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Tenemos

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{(1+1/n)^n}$$

Para $n \to \infty$, $(1+1/n)^n \to e$, de modo que el cociente anterior se aproxima a $\frac{1}{e} < 1$ para n grande. Por lo tanto, la serie *converge.*

Puede aplicarse también el criterio de comparación directamente, pues $\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)...(n/2)(n/2-1)...1}{n...n...n} \leq 1 \ldots 1 \frac{1}{2} \ldots \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^{n/2} = (\frac{1}{\sqrt{2}})^n$, de modo que la serie es convergente.

5.2.6 Convergencia absoluta y condicional

Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, donde a_n no es necesariamente positivo. Probaremos que

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \tag{18}$$

En tal caso se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente.* Sean

$$a_n^+ = \tfrac{1}{2}(|a_n| + a_n), \qquad a_n^- = \tfrac{1}{2}(|a_n| - a_n)$$

de modo que si $a_n \geq 0$, $a_n^+ = a_n$, $a_n^- = 0$, mientras que si $a_n < 0$, $a_n^+ = 0$, $a_n^- = -a_n = |a_n|$. Entonces

$$0 \leq a_n^{\pm} \leq |a_n|$$

Por el criterio de comparación, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, también convergerán las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Por lo tanto, como $a_n = a_n^+ - a_n^-$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$

también converge.

Notemos, sin embargo, que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puede converger aún cuando $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ no converge. En tal caso se dice que la convergencia es no absoluta o *condicional.* Si la convergencia es condicional, no se deben reagrupar o reordenar los términos de la serie, ya que el límite de las sumas parciales dependerá en este caso del orden de los mismos. Esto no ocurre cuando la convergencia es absoluta.

Ejemplo: Mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n)}{n^2}$ converge absolutamente.

Como $|\frac{\text{sen}(n)}{n^2}| = \frac{|\text{sen}(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ $\forall\ n \geq 1$, y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{\text{sen}(n)}{n^2}|$ también converge por el criterio de comparación, por lo que la serie original converge absolutamente.

5.2.7 Series Alternadas

Son aquellas en las que sus términos son alternadamente *positivos y negativos*, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots, \quad a_n \geq 0 \tag{19}$$

o bien $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$. Existe un importante teorema de convergencia para este tipo de series. Si

$$a_{n+1} \leq a_n \ \ \forall n \geq 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{20}$$

entonces (19) *converge.*

Podemos escribir la suma parcial para un número *par* de térmimos en la forma

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

Como por hipótesis $a_{2n-1} - a_{2n} \geq 0$, vemos que S_{2n} es una función *positiva y creciente* de n. En cambio, para un número impar,

$$S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2n} - a_{2n+1})$$

es una función *decreciente* de n, pues $a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0$. Además,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \geq 0 \tag{21}$$

de donde obtenemos la siguiente cadena de desigualdades

$$a_1 - a_2 = S_2 \leq S_4 \leq \ldots \leq S_{2n} \leq S_{2n+1} \leq \ldots \leq S_3 \leq S_1 = a_1$$

Por lo tanto, S_{2n} está *acotada superiormente*, y S_{2n+1} *acotada inferiormente* $\forall\ n$. Ambas sucesiones son entonces *convergentes* por ser monótonas, es decir,

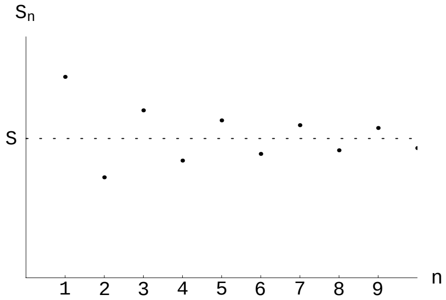
$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S_p \leq \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S_i$$

Ahora entra en juego la segunda de las hipótesis en (20). Tenemos, utilizando (21),

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) = S_p - S_i = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$$

de donde $S_p = S_i$. Tanto S_{2n} como S_{2n+1} *convergen pues a un mismo valor* S para $n \to \infty$. Obtenemos

$$0 \leq S_2 \leq S_4 \leq \ldots \leq S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1} \leq \ldots S_3 \leq S_1 \tag{22}$$



Obviamente, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$. resulta también convergente con las mismas hipótesis. Asimismo, si los a_n son decrecientes sólo para $n \geq n_0 \geq 1$, con $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, la serie (19) también converge, pues lo que sucede para $n \leq n_0$ no es relevante para la convergencia.

Una consecuencia importante de (22) es que

$$S - S_{2n} \leq S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}, \qquad S_{2n+1} - S \leq S_{2n+1} - S_{2n+2} = a_{2n+2}$$

pues $S \leq S_{2n}$ y $S \geq S_{2n+2}$. El *error* $|S - S_n|$ es pues *menor o igual que el término siguiente*, tanto para n par o impar:

$$|S - S_n| \leq a_{n+1} \tag{23}$$

Ejemplo 1: La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

converge, pues $\frac{1}{n}$ decrece con n y $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Sin embargo, no converge absolutamente pues $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge. Notemos que la serie converge lentamente (al valor $\ln(2)$ como veremos luego). Para estimarla mediante una suma finita S_n con un error $< 10^{-3}$, necesitamos $\frac{1}{n+1} \leq 10^{-3}$, es decir, $n > 1000$.

Ejemplo 2: La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}, \quad \alpha > 0$$

converge $\forall\alpha > 0$ pues $\frac{1}{n^\alpha}$ decrece con n y $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 0$. Sin embargo, converge absolutamente sólo para $\alpha > 1$ (véase sección 5.2.3).

Ejemplo 3: La serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln(n))^\alpha}, \quad \alpha > 0$$

converge, pues $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(\ln(n))^\alpha} = 0$ y $\frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$ decrece para $n \geq 2\ \forall\ \alpha > 0$. Pero converge absolutamente sólo para $\alpha > 1$ (véase ejemplo 2 en 5.2.3).

5.2.8 Series de diferencias

Mostraremos que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, finito,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n$$

En efecto, $S_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$, de donde $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a_1 - \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a_1 - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_1 - L$.

Notemos que no es posible en general escribir la serie como la diferencia $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$, pues $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ no necesariamente converge. Por ejemplo,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1$$

donde hemos supuesto $a_n = \frac{1}{n}$. También podríamos haber escrito $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1}$, con $a_n = \frac{n+1}{n}$, obteniendo el mismo resultado: $a_1 - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2 - 1 = 1$.

Asimismo, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ (finito) y $k \geq 1$ es un número *natural*,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+k}) = \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+k-1}) - (a_{n+1} + \ldots + a_{n+k-1} + a_{n+k})] = a_1 + a_2 + \ldots + a_k - k\lim_{n\to\infty} a_n$$

Por ejemplo, para $k \geq 1$ natural,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}) = \frac{1}{k}(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k})$$

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^2 - k^2} = \frac{1}{2k}\sum_{n=k+1}^{\infty}(\frac{1}{n-k} - \frac{1}{n+k}) = \frac{1}{2k}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2k}) = \frac{1}{2k}(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2k})$$

Matemáticas Especiales de Física Médica
Series de Potencias (Curso 2007)

Resumen
Una serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

donde la variable x representa un número real o complejo, se denomina *serie de potencias*. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

es obviamente una serie de potencias en la variable $x - x_0$, y se la denomina por lo tanto serie de potencias *centrada en* x_0. La serie (1) es una serie de potencias centrada en el origen ($x_0 = 0$). Consideraremos en lo siguiente series de potencias centradas en el origen con x una variable real.

La primera cuestión a determinar es el conjunto de valores de x para los cuales la serie converge. Una propiedad fundamental de una serie del tipo (1) es que *si converge para $x = b$, con $b \neq 0$, entonces converge absolutamente para* $|x| < |b|$ (o sea, para $-|b| < x < |b|$).
Demostración: Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b^n = 0$ (condición necesaria de convergencia) por lo que $\exists\ M > 0$ tal que $|a_n b^n| \leq M\ \forall\ n$. Por lo tanto,

$$|a_n x^n| = |a_n||x|^n = |a_n b^n||x^n|/|b|^n < M s^n\,, \quad s = |x|/|b|$$

Si $|x| < |b| \Rightarrow 0 \leq s < 1$ y $\sum_{n=0}^{\infty} M s^n$ converge (serie geométrica de razón s), por lo que $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ converge por el criterio de comparación. Esto implica a su vez que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para $|x| < |b|$.

Como consecuencia, si sabemos que una serie de potencias centrada en el origen converge por ejemplo en $x = 1$ y diverge en $x = 2$, entonces converge absolutamente para $|x| < 1$ y diverge para $|x| > 2$.

Vemos entonces que **existen tres posibilidades para la región de convergencia**:
1) Existe $r > 0$ tal que la serie converge absolutamente para $|x| < r$ y diverge para $|x| > r$. El número r se denomina **radio de convergencia** de la serie. En $x = r$ y $x = -r$, la serie puede converger o diverger.
2) La serie converge $\forall\ x$. En tal caso se dice que el radio de convergencia es *infinito*.
3) La serie converge sólo para $x = 0$ (en cuyo caso $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0$). En tal caso se dice que el radio de convergencia es nulo ($r = 0$).

El conjunto de valores donde la serie de potencias converge se denomina **intervalo de convergencia**. En el caso 1), el intervalo de convergencia puede ser $[-r, r]$, $(-r, r]$, $[-r, r)$ o $(r, -r)$, según la serie converja en ambos extremos, uno de los extremos o en ninguno. En 2) es obviamente $(-\infty, \infty)$ y en 3) sólo $x = 0$.

El ejemplo más simple de serie de potencias es la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

que corresponde a $a_n = 1\ \forall\ n$. Sabemos que converge absolutamente para $|x| < 1$ (convergiendo a $1/(1-x)$) y diverge para $|x| \geq 1$. El radio de convergencia es pues $r = 1$ y el intervalo de convergencia $(-1, 1)$.

Determinación del radio de convergencia:
El método más simple y útil para determinar el radio de convergencia en las series usuales es aplicar el *criterio del cociente*. Si $a_n \neq 0\ \forall\ n$ y $x \neq 0$, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$$

Por lo tanto, si el límite

$$L = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$$

existe, el criterio del cociente implica que la serie *converge absolutamente* para $|x|L<1$, es decir, $|x|<1/L$ si $L\neq 0$, y diverge para $|x|L>1$, o sea $|x|>1/L$ si $L\neq 0$. Si $L=0$, la serie converge $\forall\ x$, mientras que si $L=\infty$ la serie converge sólo en $x=0$. El radio de convergencia es pues

$$r=\frac{1}{L}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|}$$

en el caso en que tal límite exista. Si $L=0\Rightarrow r=\infty$ mientras que si $L=\infty\Rightarrow r=0$.

Cuando r es finito, el criterio del cociente *no decide la convergencia en los bordes* $x=\pm r$, pues en tal caso $|x|L=1$. La convergencia para $x=\pm r$ debe pues determinarse mediante *un criterio diferente*.

Ejemplo 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

En este caso $a_n=1/n$ y $L=\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|=\lim_{n\to\infty}n/(n+1)=1$. Por lo tanto $r=1/L=1$. Podemos obtener el mismo resultado aplicando el criterio del cociente directamente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x^{n+1}/(n+1)|}{|x^n/n|}=|x|\lim_{n\to\infty}n/(n+1)=|x|$$

por lo que la serie converge para $|x|<1$ y diverge para $|x|>1$. El radio de convergencia es pues $r=1$.

Para determinar la convergencia en $x=\pm 1$ debemos aplicar otros criterios. Si $x=1$, se obtiene la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

que es una serie divergente (serie armónica, o sea, serie p con $p=1$) mientras que si $x=-1$, se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

que es una serie convergente por el criterio de series alternantes (pues $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$, y $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$). El intervalo de convergencia es pues $[-1,1)$. La serie converge absolutamente para $|x|<1$ y condicionalmente en $x=-1$.

Ejemplo 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

En este caso, $a_n=1/n!$ y $L=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$, por lo que $r=\infty$. La serie converge $\forall\ x$. Podemos obtener el mismo resultado aplicando directamente el criterio del cociente,

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!}|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1\ \ \forall\ x$$

por lo que la serie converge $\forall\ x$ y $r=\infty$.

Ejemplo 3:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$$

En este caso, $a_n=n!$ y $L=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$, por lo que $r=0$. La serie converge sólo para $x=0$. Podemos obtener el mismo resultado aplicando directamente el criterio del cociente,

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}|=|x|\lim_{n\to\infty}(n+1)=\{^{\infty\ \ x\neq 0}_{0\ \ x=0}$$

por lo que la serie converge sólo para $x=0$.

Ejemplo 4:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

En este caso sólo aparecen potencias pares. Aplicando directamente el criterio del cociente, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x^{2(n+1)}/(2(n+1))!|}{|x^{2n}/(2n)!|}=|x|^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}=0\ \ \forall\ x$$

por lo que la serie converge $\forall\ x$.

Derivadas e integrales de series de potencias:
Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con radio de convergencia $r > 0$ *define* una función $f(x)$ en su intervalo de convergencia, dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < r$$

Si la serie converge en uno ambos extremos podemos obviamente incluir dichos puntos en el dominio de $f(x)$. No obstante, las siguientes propiedades fundamentales de $f(x)$, son válidas en general sólo en el intervalo abierto $|x| < r$, donde la serie converge con seguridad en forma absoluta.

1) *$f(x)$ es derivable para $|x| < r$, y su derivada es*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad |x| < r$$

La derivada de $f(x)$ se obtiene pues derivando término a término la serie que define a $f(x)$, y la serie resultante posee *el mismo radio de convergencia* r que la serie original. La convergencia en los extremos ($x = \pm r$) puede, no obstante, ser distinta que la de la serie original.

Aplicando esta misma propiedad a $f'(x)$, vemos que $f'(x)$ es derivable, con $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ para $|x| < r$, y así sucesivamente. La función $f(x)$ es pues derivable *a cualquier orden* n para $|x| < r$, obteniéndose las derivadas por derivación término a término.

2) *$f(x)$ es integrable para $|x| < r$, con*

$$\int_0^x f(x')dx' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < r$$

La integral de $f(x)$ se obtiene pues integrando término a término la serie que define a $f(x)$, y la serie resultante posee *el mismo radio de convergencia* r que la serie original.

Ejemplos: En el caso de la serie geométrica, sabemos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

Entonces 1) implica que

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = (\frac{1}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ converge pues a $1/(1-x)^2$ para $|x| < 1$. Análogamente,

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1$$

Esto permite evaluar series tales como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{2})^{n-1} = \frac{1}{(1-1/2)^2} = 4$$

La propiedad 2) implica que

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} x'^n dx' = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x x'^n dx' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x), \quad |x| < 1$$

Por lo tanto, hemos obtenido una expresión en forma de serie para el logaritmo que es la que permite evaluar numéricamente el mismo dentro del intervalo de convergencia. Se obtiene $\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ si $|x|<1$ y, mediante el cambio de variables $x \to -x$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}, \quad |x|<1$$

Puede demostrarse que esta serie converge condicionalmente en $x=1$ (pero no en $x=-1$), y que la igualdad anterior es en realidad válida para $-1<x\leq 1$, de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

La serie armónica alternante $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ converge pues condicionalmente a $\ln 2$.
(Demostración: Sabemos que $\sum_{n=0}^{m}(-x)^n = \frac{1-(-x)^{m+1}}{1+x}$ para $x\neq -1$ (ver series geométricas). Intregando entre 0 y x, se obtiene $\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x)+(-1)^m\int_0^x \frac{t^{m+1}}{1+t}dt$. Para $x>0$, el módulo de la última integral es menor que $\int_0^x t^{m+1}dt = \frac{x^{m+2}}{m+2}$, lo cual tiende a 0 para $m\to\infty$ si $0\leq x\leq 1$ (o sea, incluyendo $x=1$). Por lo tanto, para $m\to\infty$ y $x=1$ obtenemos $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$).

3) Si $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ para $|x|<r$, entonces

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n=0,1,2,\ldots$$

es decir, $a_0=f(0)$, $a_1=f'(0)$, $a_2=f''(0)/2$, $a_3=f'''(0)/6$, etc. Para $n\geq 1$, los coeficientes a_n representan pues el valor de la derivada de orden n de f en el origen dividida por $n!$, mientras que $a_0=f(0)$.
Demostración: Como

$$f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots, \quad |x|<r$$

se obtiene $f(0)=a_0$. Análogamente,

$$f'(x) = a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots, \quad |x|<r$$

de donde $f'(0)=a_1$ y

$$f''(x) = 2a_2+2.3a_3x+3.4.a_4x^2+\ldots \quad |x|<r$$

de donde $f''(0)=2a_2$, y en general, $f^{(n)}(0)=n!a_n$.

Por ejemplo, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ para $|x|<1$ implica que $f^{(n)}(0)=n!$, es decir, $(\frac{1}{1-x})^{(n)}|_{x=0}=n!$, como es fácil verificar: $f(0)=1$, $f'(0)=\frac{1}{(1-x)^2}|_{x=0}=1$, $f''(0)=\frac{2}{(1-x)^3}|_{x=0}=2$, $f'''(0)=\frac{2.3}{(1-x)^4}|_{x=0}=3!$, etc.

Consideremos ahora la función definida por

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots$$

Como la serie converge $\forall\, x$ (radio de convergencia infinito) la función queda definida $\forall\, x\in\mathbb{R}$. Reemplazando $x=0$, se obtiene inmediatamente $f(0)=1$. Además,

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = f(x)$$

Por lo tanto, $f'(x)=f(x)$, con $f(0)=1$. Tal función debe pues coincidir con la función exponencial, es decir, $f(x)=e^x$, que cumple $e^0=1$ y $(e^x)'=e^x$. Además, $f^{(n)}(x)=e^x$, por lo que $f^{(n)}(0)=e^0=1$, verificándose que $f^{(n)}(0)/n!=1/n!$. Obtenemos pues la expresión

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

válida $\forall\, x\in\mathbb{R}$, que permite evaluar numéricamente tanto e como e^x. Por ejemplo,

$$e=e^1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots, \qquad \sqrt{e}=e^{1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4.2}+\frac{1}{8.6}+\ldots$$

Polinomio de Taylor y Serie de Taylor
En general, dada una función $f(x)$ que supondremos derivable a cualquier orden en $x=0$, podemos construir el polinomio

$$P_m(x)=\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\tfrac{1}{2}f''(0)x^2+\tfrac{1}{3!}f'''(0)x^3+\ldots+\tfrac{1}{m!}f^{(m)}(0)x^m$$

que se denomina *Polinomio de Taylor de grado* m de $f(x)$ alrededor de $x=0$.
Tal polinomio cumple las siguientes propiedades fundamentales:

1) Las derivadas de $P_m(x)$ en $x=0$ coinciden con las de $f(x)$ en $x=0$ hasta el orden m:

$$P_m^{(n)}(0)=f^{(n)}(0),\quad n=0,\ldots,m$$

de forma que $P_m(0)=f(0)$, $P'_m(0)=f'(0)$, ..., $P_m^{(m)}(0)=f^{(m)}(0)$. La demostración es similar a la del punto 3) anterior.

2) Como consecuencia de 1), se verifica que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-P_m(x)}{x^n}=0,\quad n=0,\ldots,m$$

(se demuestra aplicando la regla de L'Hopital hasta orden n). Esto implica que la diferencia

$$R_m(x)=f(x)-P_m(x)$$

denominada resto o error, es muy pequeña para $x\to 0$, ya que no sólo cumple que $\lim_{x\to 0}R_m(x)=0$ sino también $\lim_{x\to 0}R_m(x)/x^n=0$ para $n=0,\ldots,m$. En otras palabras, $|R_m(x)|$ es "más pequeño" que x^n para $x\to 0$. Esto es consecuencia de que las derivadas de $R_m(x)$ en $x=0$ son, por 1), todas nulas hasta el orden m inclusive: $R_m^{(n)}(0)=0$, $n=0,1,\ldots,m$.

En general, podemos escribir entonces

$$f(x)=P_m(x)+R_m(x)$$

con $R_m(x)$ pequeño para $x\to 0$. Tomando ahora el límite $m\to\infty$ obtenemos

$$f(x)=\lim_{m\to\infty}[\sum_{n=0}^{m}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_m(x)]$$

Para aquellos x en los que $\lim_{m\to\infty}R_m(x)=0$, se obtiene el desarrollo de $f(x)$ como una serie de potencias:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\quad \textit{sii}\quad \lim_{m\to\infty}R_m(x)=0$$

denominado en general *desarrollo en serie de Taylor de* f *alrededor de* $x=0$. La condición $\lim\limits_{m\to\infty}R_m(x)=0$ se cumple en un cierto intervalo $|x|<r$ para todas las funciones que son *analíticas* en un entorno del origen (la definición más general de analiticidad la daremos más adelante). No obstante, existen también funciones reales derivables a todo orden tanto en $x=0$ como en un entorno $(-a,a)$ del origen, para las cuales $\lim_{m\to\infty}R_m(x)\neq 0\ \forall\ x\neq 0$, y que no son por lo tanto desarrollables en serie de potencias, a pesar de ser "suaves".
Una expresión general para el resto, en el caso de funciones derivables a todo orden, es

$$R_m(x)=\frac{f^{(m+1)}(c)x^{m+1}}{(m+1)!},\quad c \text{ entre } 0 \text{ y } x$$

donde c es un cierto número comprendido entre 0 y x. Esta expresión sirve en general para *acotar* el resto pero no para determinarlo exactamente.

Ejemplo: $f(x) = \sin(x)$.
Tenemos $f(0) = 0$, $f'(0) = \cos(0) = 1$, $f''(0) = -\sin(0) = 0$, $f'''(0) = -\cos(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = \sin(0) = 0$, por lo que en general,

$$f^{(2n)}(0) = 0, \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

Además, $|R_m(x)| = |\frac{f^{(m+1)}(c)x^{m+1}}{(m+1)!}| \leq \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}$ por lo que $\lim\limits_{m\to\infty} |R_m(x)| \leq \lim\limits_{m\to\infty} \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!} = 0 \;\forall\, x$, pues $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge $\forall\, x$ y entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \;\forall\, x$. Por lo tanto $\lim\limits_{m\to\infty} R_m(x) = 0 \;\forall\, x$ y

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots, \quad x \in \Re$$

La serie converge $\forall\, x \in \Re$, y permite entonces evaluar el seno de cualquier número con precisión arbitraria, aunque por las propiedades $\sin(x) = \sin(x+2\pi)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\sin(\pi/2+x) = \sin(\pi/2-x)$, sólo interesa el intervalo $[0, \pi/2]$. Remarquemos que x representa *radianes* ($\sin(30^o)$ debe evaluarse como $\sin(\pi/6)$).

Para $f(x) = \cos(x)$ podemos proceder en forma similar, pero es más rápido obtener el desarrollo directamente derivando el desarrollo anterior. Se obtiene entonces

$$\cos(x) = (\sin(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots, \quad x \in \Re$$

La serie converge $\forall\, x \in \Re$. Dado que $\cos(x) = \cos(-x)$ (función par), sólo aparecen potencias *pares* en el desarrollo de $\cos(x)$, y dado que $\sin(x) = -\sin(-x)$ (función impar), sólo aparecen potencias *impares* en el desarrollo de $\sin(x)$.

De la misma manera, si $f(x) = e^x$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots \quad x \in \Re$$

que converge $\forall\, x \in \Re$. Puede comprobarse fácilmente que se cumple $\lim_{m\to\infty} R_m(x) = 0 \;\forall\, x$.

Hemos también obtenido anteriormente el desarrollo de $f(x) = 1/(1-x)$ a partir de la serie geométrica,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots, \quad |x| < 1$$

que es válido sólo para $|x| < 1$ (en este caso $\lim_{m\to\infty} R_m(x) = 0$ sólo si $|x| < 1$).

Integrando el desarrollo anterior y efectuando el cambio de variables $x \to -x$, se obtiene el desarrollo de $f(x) = \ln(1+x)$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \quad -1 < x \leq 1$$

que es válido sólo para $-1 < x \leq 1$ (se comprueba que $\lim_{m\to\infty} R_m(x) = 0$ sólo para $-1 < x \leq 1$).

Los cinco casos anteriores constituyen los desarrollos "famosos" que la mayoría de los físicos (e ingenieros, matemáticos, químicos, etc.) siempre recuerdan.

Otro desarrollo muy conocido y útil es el de $f(x) = (1+x)^k$. Obtenemos $f(0) = 1$, $f'(0) = k(1+0)^{k-1} = k$, $f''(0) = k(k-1)(1+0)^{k-2} = k(k-1)$, ... y por lo tanto,

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} x^3 + \ldots, \quad |x| < 1$$

que converge en general para $|x| < 1$ ($\lim\limits_{m\to\infty} R_m(x) = 0$ si $|x| < 1$) y es válido *para cualquier número real* k.
Por ejemplo, si $k = 1/2$, $f(x) = \sqrt{1+x}$ y

$$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \ldots, \quad |x| < 1$$

Para $k = -1$ se obtiene $(1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, el cual puede obtenerse directamente a partir de la serie geométrica $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x| < 1$, reemplazando $x \to -x$.

Mencionemos también que si $f(x)$ es un *polinomio de grado* m, el desarrollo en serie de Taylor se reduce a un polinomio de grado m que coincide *exactamente* con $f(x)$ ($f(x) = P_m(x)$). Por ejemplo, en la serie anterior, si k es natural ($k = 0, 1, 2, \ldots$) $f(x) = (1+x)^k$ es un polinomio de grado k y vemos que los coeficientes del desarrollo de $(1+x)^k$ *se anulan* para $n > k$, obteniéndose la fórmula del binomio de Newton,

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \ldots + kx^{k-1} + x^k = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} x^n$$

donde $\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}$.

Contraejemplo: Como se dijo previamente, existen funciones que a pesar de ser derivables a cualquier orden en $x = 0$, no pueden ser desarrolladas en serie de potencias. Un conocido ejemplo es

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que f es derivable a cualquier orden en $x = 0$ (se deja como ejercicio), con $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ y en general, $f^{(n)}(0) = 0 \; \forall \, n$. Por lo tanto, en este caso $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$ a pesar de que $f(x) \neq 0$. Lo que sucede es que $\lim\limits_{m \to \infty} R_m(x) \neq 0 \; \forall \, x \neq 0$, siendo en realidad $R_m(x) = f(x) \; \forall \, m$ (y $P_m(x) = 0 \; \forall \, m$). Esta función *no es analítica* en $x = 0$. Intuitivamente, esta función posee un mínimo muy "plano" en $x = 0$ (recordar dibujo hecho en clase), siendo $f(x)$ más pequeña que cualquier potencia x^n para $x \to 0$.

Unicidad. Puede comprenderse fácilmente que el desarrollo en serie de potencias de una función $f(x)$ alrededor de $x = 0$ *es único* (pues necesariamente $a_n = f^{(n)}(0)/n!$). Esto permite en muchos casos obtener el desarrollo simplemente por métodos indirectos (sustitución, integración, derivación) sin necesidad de calcular todas las derivadas en el origen. El desarrollo obtenido coincidirá de todos modos con la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Ejemplo 1: $f(x) = e^{x^2}$.
En lugar de evaluar $f^{(n)}(0)$, podemos sencillamente utilizar el desarrollo conocido $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} u^n/n!$ y efectuar el reemplazo $u = x^2$, obteniéndose

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \ldots, \quad x \in \Re$$

Ejemplo 2: $f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$.
La función e^{t^2} es integrable, pero su integral no puede expresarse en términos de las funciones elementales conocidas. Podemos, no obstante, obtener el desarrollo en serie de esta función directamente integrando el desarrollo anterior de e^{x^2}, obteniéndose

$$f(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} = x + \frac{x^3}{3} + \ldots, \quad x \in \Re$$

Ejemplo 3: $f(x) = \sin(2x)$. Como $\sin(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} u^{2n+1}$, reemplazando $u = 2x$ obtenemos

$$\sin(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = 2x - \frac{8x^3}{3!} + \ldots, \quad x \in \Re$$

Ejemplo 4: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$, con $f(0) = 1$. Esta función es continua y derivable a cualquier orden en $x = 0$. El desarrollo puede obtenerse directamente dividiendo por x el desarrollo de $\sin(x)$:

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \ldots, \quad x \in \Re$$

Análogamente, el desarrollo en serie de $f(x) = x^2 \cos(x/2)$ alrededor de $x = 0$ es

$$x^2 \cos(x/2) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\frac{x}{2})^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{x^{2n+2}}{2^{2n}} = x^2 - \frac{x^4}{8} + \ldots, \quad x \in \Re$$

y el de $f(x) = e^x - 1 - x$ es

$$e^x - 1 - x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 - x = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots) - 1 - x = \frac{x^2}{2!} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \Re$$

El desarrollo en serie de potencias sirve pues tanto para evaluar numéricamente funciones trascendentes como e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, como también para evaluar límites y estimar y/o visualizar funciones en la vecindad de un punto (ver ejemplos en la práctica).
Ejemplo 1: Evaluar $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.
Puede procederse empleando L'Hopital dos veces, o también desarrollando en serie $f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$:

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{x^2} (\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots) = \frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \ldots$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$. La ventaja del desarrollo en serie es que permite no sólo evaluar el límite para $x \to 0$, sino también visualizar el comportamiento de la función para $x \to 0$. Vemos aquí que $f(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x$ para x pequeño.
Ejemplo 2: Verificar que la energía cinética relativista de una partícula de masa en reposo m_0, dada por

$$E_c = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0 c^2$$

se reduce a la energía cinética clásica $E_c = \frac{1}{2} m_0 v^2$ si $|v| \ll c$, donde c denota la velocidad de la luz.
Consideremos primero la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1 + x)^{-1/2}$. Utilizando el desarrollo de $f(x) = (1 + x)^k$ alrededor de $x = 0$ hasta orden 1 para $k = -1/2$, se obtiene

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2} x + \ldots, \quad |x| < 1$$

Por lo tanto, si ahora $x = -v^2/c^2$, tenemos

$$E_c = m_0 c^2 [\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1] = m_0 c^2 [(1 - \frac{1}{2}(-\frac{v^2}{c^2}) + \ldots) - 1] = m_0 c^2 [\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots] = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \ldots$$

donde los términos siguientes son muy pequeños para $|v|/c \ll 1$. Se deja como ejercicio (ver práctica) determinar el siguiente término del desarrollo en serie de E_c en potencias de $u = v/c$ alrededor de $u = 0$.
Notemos que $u = v/c$ es *adimensional*. Sólo así podemos decir que u es pequeño, independiente de las unidades en que se miden las velocidades. Los desarrollos en serie de magnitudes físicas se deben pues realizar en términos de variables *adimensionales*.

Desarrollo alrededor de un punto arbitrario $x = x_0$.
Si $f(x)$ es derivable a cualquier orden en $x = x_0$, podemos en general escribir

$$f(x) = P_m(x - x_0) + R_m(x - x_0)$$

con

$$P_m(x - x_0) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad R_m(x - x_0) = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} (x - x_0)^{m+1},$$

y c entre x_0 y x. Finalmente

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{sii} \quad \lim_{m \to \infty} R_m(x - x_0) = 0$$

El desarrollo anterior se denomina desarrollo en serie de Taylor alrededor de $x = x_0$, y corresponde al desarrollo alrededor de $u = 0$ de la función $g(u) = f(u + x_0)$, con $u = x - x_0$. El desarrollo converge en general a f en un cierto intervalo $|x - x_0| < r$ centrado en $x = x_0$.