Práctica 4: integrales en variable compleja. Desarrollos en series de potencias. Residuos

1. ** Evalúe la integral $\int_C z^2 dz$, donde C es la curva dada por

a) El segmento que une 1 con i.

b) El cuarto de círculo de radio 1 con centro en el origen que une 1 con i.

c) Verifique la concordancia con la evaluación directa por medio de la primitiva de z^2.

d) Verifique que en este ejemplo $\int_C |z|^2 dz$ depende del camino.

2. ** Encuentre el valor de las siguientes integrales, donde el camino es una curva simple arbitraria entre los límites indicados:

$$\textbf{a)} \int_{1/2}^{i-1} e^{-\pi z}\, dz\,, \quad \textbf{b)} \int_0^{\pi - i} \sin\frac{z}{2}\, dz\,, \quad \textbf{c)} \int_i^2 (z-1)^2\, dz\,.$$

3. Resuelva empleando la fórmula de Cauchy para $f(z)$ o sus derivadas:

a) $\int_C \frac{\cos z}{z-\pi/2}\, dz$ donde C es un círculo $|z| = 3$.

b) $\int_C \frac{\cos(2z)}{z(z-\pi/2)}\, dz$ donde C es el círculo $|z| = 1$.

c) $\int_C \frac{\cos(2z)}{z(z-\pi/2)}\, dz$ donde C es el círculo $|z| = 2$.

d) $\int_C \frac{e^{-z}}{(z-i)\cos(z)}\, dz$ donde C es el círculo $|z - i| = 1$.

4. ** Determine y clasifique las singularidades de las siguientes funciones $f(z)$:

$$\textbf{a)}\ f(z) = \frac{1}{z^2+1}\,, \quad \textbf{b)}\ f(z) = z\cos\left(\frac{1}{z}\right), \quad \textbf{c)}\ f(z) = \frac{1}{z(z-i)} + \frac{4}{(z-i)^2}\,,$$
$$\textbf{d)}\ f(z) = \frac{1}{1+e^{2z}}\,, \quad \textbf{e)}\ f(z) = \sqrt{z+3}\,.$$

5. ** Evalúe, por medio del teorema de los residuos, $\oint_C f(z) dz$ para las funciones del problema anterior, siendo la curva C un círculo de radio 2 (recorrido en sentido antihorario) centrado en el origen.

6. Evalúe, por medio de la representación como integral compleja,

$$\textbf{a)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{p+\sin\theta}\, d\theta\,,\ p > 1\,, \quad \textbf{b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx\,, \quad \textbf{c)} \int_0^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\, dx\,, \quad \textbf{d)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4}\, dx\,.$$