

Práctica 5: distribuciones. Análisis de Fourier

1. Muestre que el conjunto de funciones $\{1, \cos(n\pi x/L), \sin(n\pi x/L), n = 1, 2, \dots\}$ es ortogonal.

2. ** Evalúe

$$\begin{aligned} \text{a)} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-2)f(x) dx, \quad \text{b)} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(6x)f(x) dx, \quad \text{c)} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2-4)f(x) dx, \\ \text{d)} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-1)f(x) dx, \quad \text{e)} \int_{-\infty}^{\infty} [H(x+1) - H(x-1)]f(x) dx, \\ \text{f)} \int dx dy \delta(x-1)\delta(2y-1)f(x, y), \quad \text{g)} \int dx dy (\delta(x-1) + \delta(2y-1)) f(x, y), \end{aligned}$$

3. ** Encuentre el desarrollo en serie de Fourier en el intervalo $[-L, L]$ de las siguientes funciones, especificando a qué función converge la serie en dicho intervalo.

$$\text{a)} f(x) = 1, \quad \text{b)} f(x) = x, \quad \text{c)} f(x) = x^2, \quad \text{d)} f(x) = |x|.$$

¿Coincide el desarrollo obtenido en **b)** con la derivada del desarrollo de $x^2/2$? ¿Coincide el desarrollo obtenido en **a)** con la derivada del desarrollo **b)**?

4. Encuentre el desarrollo en serie de medio rango en cosenos en el intervalo $[0, \pi]$ de las funciones

$$\text{a)} f(x) = 1, \quad \text{b)} f(x) = x.$$

5. Encuentre el desarrollo en serie de medio rango en senos, en el intervalo $[0, \pi]$ de las funciones

$$\text{a)} f(x) = 1, \quad \text{b)} f(x) = x, \quad \text{c)} f(x) = \sin x.$$

Indique en todos los casos a qué función converge el desarrollo para $x \in [-\pi, \pi]$. ¿Qué condición de contorno satisfacen las funciones $\sin nx$ en $x = 0$ y $x = \pi$?

6. ** Sean $F(k)$ y $G(k)$ las Transformadas de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente, pruebe que

- a) la transformada de Fourier de $a f(x) + b g(x)$ es $a F(k) + b G(k)$ (linealidad),
- b) la transformada de Fourier de $f(x+b)$ es $e^{ibk} F(k)$,
- c) la transformada de Fourier de $f(ax)$ para $a \neq 0$ es $F(k/a)/|a|$,
- d) la transformada de Fourier de $f'(x)$ es $ikF(k)$,
- e) la transformada de Fourier de $x f(x)$ es $iF'(k)$.

7. Encuentre la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} \text{a)} f(x) = e^{-a|x|}, a > 0, \quad \text{b)} f(x) = e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad \text{c)} f(x) = H(x+a) - H(x-a), \\ \text{d)} f(x) = \delta(x), \quad \text{e)} f(x) = 1, \quad \text{f)} f(x) = \sin x, \quad \text{g)} f(x) = \cos x, \quad \text{h)} f(x) = x e^{-a|x|}. \end{aligned}$$