Mecánica Cuántica I
DF - FCEx - UNLP
2do semestre 2023

PROF: Pablo Pisani
JTP: Lucas Manzo
AD: Tomás Vignau

Práctica 3

Los ejercicios marcados con asterisco (*) son opcionales.

Los ejercicios marcados con una daga (†) están relacionados con la cátedra Experimentos Cuánticos I (DF-FCEx-UNLP). Son particularmente recomendados para quienes cursen, hayan cursado o vayan a cursar dicha materia.

3.1 Ec. de Schrödinger - propiedades

39. Considerar la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para una partícula libre ($\hat{V} = 0$). Probar que la sustitución $\tau = it$ convierte a dicha ecuación en la ecuación de difusión (también llamada ecuación de calor). ¿Cuál es en este caso el coeficiente de difusión?

    Nota: a la sustitución $\tau = it$ se la conoce como *rotación de Wick*.

40. a. A partir de la ecuación de Schrödinger, hallar la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Psi^*\Psi) - i\frac{\hbar}{2m}\nabla \cdot \Big(\Psi^*(\nabla\Psi) - (\nabla\Psi^*)\Psi\Big) = 0\ . \tag{3.1.1}$$

    b. A partir de la ecuación anterior, definir la densidad de probabilidad y la corriente de probabilidad. ¿En qué casos se conserva esta última?

41. Considerar la ecuación de Schrödinger unidimensional independiente del tiempo, con un potencial $V(x)$ que es nulo si $|x| > L$. A una función con estas características se la denomina *función de soporte compacto* y a la región $(-L, L)$ se la denomina *soporte de la función.*

a. Verificar que la solución general de la ecuación de Schrödinger por fuera del soporte del potencial (tanto a izquierda Ψ_L como a derecha Ψ_R) puede ser escrita como

$$\Psi_L(x) = a\, e^{ik(x+L)} + b\, e^{-ik(x+L)} \,, \tag{3.1.2}$$
$$\Psi_R(x) = c\, e^{ik(x-L)} + d\, e^{-ik(x-L)} \,. \tag{3.1.3}$$

¿Quién es k en estas expresiones?

b. Calcular las corrientes de probabilidad fuera del soporte del potencial (tanto a izquierda como a derecha).

c. Empleando la conservación de la corriente de probabilidad (¿por qué es válida esta conservación?), hallar una relación entre los coeficientes de la solución general de la función de onda tanto a izquierda como a derecha del soporte de $V(x)$.

d. Considerando una partícula que incide desde la izquierda, definir los coeficientes de reflexión R_L y transmisión T_L. Probar que $R_L + T_L = 1$.

e. Considerando una partícula que incide desde la derecha, definir los coeficientes de reflexión R_D y transmisión T_D. Probar que $R_D + T_D = 1$.

f. Sea S una matriz de 2×2 que relaciona linealmente a los coeficientes b y c con los coeficientes a y d:

$$S = \begin{pmatrix} r_L & t_R \\ t_L & r_R \end{pmatrix} \,, \qquad \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} \tag{3.1.4}$$

.

Relacionar a las entradas de la matriz S con los coeficientes de transmisión y reflexión en los casos particulares analizados en los dos incisos anteriores.

g. Probar que S es una matriz unitaria.

h. Sabiendo que si Ψ es solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo entonces Ψ^* también lo es (demostrarlo), probar que S es una matriz simétrica. Concluir qué relaciones existen entre las entradas de la matriz S.

42. Probar que siempre es posible tirar cualquier término constante en el potencial $\hat{V}$. ¿Qué sucede con las energías en ese caso? Si lo único que se puede medir en la naturaleza son las diferencias de energía, ¿puede una medida verse alterada por la presencia o ausencia de un término constante en el potencial?

43. Sea $\hat{H}$ un hamiltoniano dependiente de un conjunto de parámetros $\{\lambda_a\}$ (por ejemplo, estos parámetros podrían ser la masa m, la carga eléctrica e, la frecuencia ω, o incluso cualquier número cuántico). Sea además $|\Psi\rangle$ un autoestado normalizado de dicho hamiltoniano, con energía E. Naturalmente, tanto el autoestado como la energía también pueden depender de los parámetros $\{\lambda_a\}$.

Dado algún parámetro λ en particular, probar el *teorema de Feynman-Hellmann*, que establece la siguiente relación:

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = \left\langle \Psi \middle| \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} \middle| \Psi \right\rangle \,. \tag{3.1.5}$$

44. Como aplicación del teorema de Feynman-Hellmann (ejercicio anterior), considerar un potencial que sea una potencia de x (es decir, un potencial de la forma $\hat{V} = V_r\,\hat{x}^r$ donde V_r es una constante) y seguir los siguientes pasos para probar el teorema del virial en estos casos.

a. Mediante un análisis dimensional, probar que las energías E_n satisfacen la relación de proporcionalidad

$$E_n \propto \left(\frac{\hbar^{2r}\,V_r^2}{m^r}\right)^{1/(2+r)} , \tag{3.1.6}$$

donde la constante de proporcionalidad es adimensional.

b.* Discutir por qué la ecuación (3.1.6) falla para el caso $r = -2$. Discutir también qué sucede en el caso $r = 0$.

c. De ahora en más, considerar siempre $r \neq 2$ y $r \neq 0$. Aplicar la ecuación (3.1.5) para probar que el valor medio de la energía cinética $\hat{T} := -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$, calculado respecto de cualquier autoestado del hamiltoniano, es

$$\langle\hat{T}\rangle_n = \frac{r}{2+r}E_n\ . \tag{3.1.7}$$

Sugerencia: al emplear (3.1.5), tomar como parámetro de derivación a $\hbar$.

d. Aplicar la ecuación (3.1.5) para probar que el valor medio de la energía potencial, calculado respecto de cualquier autoestado del hamiltoniano, es

$$\langle\hat{V}\rangle_n = \frac{2}{2+r}E_n\ . \tag{3.1.8}$$

Sugerencia: al emplear (3.1.5), tomar como parámetro de derivación a V_r.

e. Concluir el teorema del virial

$$\langle\hat{T}\rangle_n = \frac{2}{r}\langle\hat{V}\rangle_n\ . \tag{3.1.9}$$

45. Considerar la ecuación de Schrödinger n-dimensional independiente del tiempo. Todo potencial puede ser escrito de la forma $V(\boldsymbol{x}) = V_0\,w(\boldsymbol{x})$, donde V_0 es alguna constante con unidades de energía, mientras que $w(\boldsymbol{x})$ es una función sin unidades.

a. Probar que $L = \sqrt{\hbar^2/2mV_0}$ es una magnitud con unidades de longitud.

b. Probar que la sustitución $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}/L$ permite adimensionalizar la ecuación de Schrödinger en la forma

$$\Big(-\nabla_y^2 + v(\boldsymbol{y})\Big)\Psi = \epsilon\Psi\ , \tag{3.1.10}$$

donde $v(\boldsymbol{y}) := w(L\boldsymbol{y})$ y $\nabla_y^2 := \big(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2}{\partial y_n^2}\big)$ representa el operador laplaciano calculado respecto de las variables $\boldsymbol{y}$. ¿Quién es ϵ y qué unidades tiene?

c. Definir adecuadamente la función de onda $\phi(\boldsymbol{y})$ (con $\phi(\boldsymbol{y}) = \Psi(\boldsymbol{x})$) tal que la interpretación probabilística para $\Psi(\boldsymbol{x})$ sea también válida para $\phi(\boldsymbol{y})$.

Observación: este ejercicio muestra que, si se fija una escala de energía V_0 relacionada con el potencial $V(\boldsymbol{x})$, entonces siempre es posible adimensionalizar la ecuación de Schrödinger.

46. Considerar el caso n-dimensional, con $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Suponer que se tiene un potencial *separable en coordenadas cartesianas*, es decir, que puede ser escrito como $V(\boldsymbol{x}) = V_1(x_1) + \cdots + V_n(x_n)$. Probar que si $\psi_i(x,t)$ es alguna solución de la ecuación unidimensional de Schrödinger con potencial $V_i(x)$,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_i(x,t) + V_i(x)\psi_i(x,t) = i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)\ , \tag{3.1.11}$$

entonces $\Psi(\boldsymbol{x},t) = \psi_1(x_1,t)\psi_2(x_2,t)\ldots\psi_n(x_n,t)$ es una solución del problema n-dimensional.

3.2 El pozo rectangular

47.† Resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el pozo infinito de potencial:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } |x| > L/2 \\ 0 & \text{si } |x| < L/2 \end{cases}\ . \tag{3.2.1}$$

48.† Considerar el caso de un pozo de potencial finito con altura $V_0 > 0$:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & \text{si } |x| > L/2 \\ 0 & \text{si } |x| < L/2 \end{cases}\ . \tag{3.2.2}$$

a. Hallar los estados estacionarios pares (es decir, con $\Psi(x) = \Psi(-x)$, sin necesidad de normalizar) confinados al interior del pozo (es decir, con $0 < E < V_0$), y probar que las energías están dadas por la ecuación trascendente

$$\tan\left(\frac{L}{2}\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\right) = \sqrt{\frac{V_0 - E}{E}}\ . \tag{3.2.3}$$

b. Hallar los estados estacionarios impares (es decir, con $\Psi(x) = -\Psi(-x)$, sin necesidad de normalizar) confinados al interior del pozo, y probar que las energías están dadas por la ecuación trascendente

$$\tan\left(\frac{L}{2}\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\right) = -\sqrt{\frac{E}{V_0 - E}}\ . \tag{3.2.4}$$

c. A partir de la identidad $\tan(x + \pi/2) = -1/\tan(x)$, probar que las ecuaciones (3.2.3) y (3.2.4) pueden resumirse en

$$\tan\left(\frac{L}{2}\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\right) = \sqrt{\frac{V_0 - E}{E}}\ ,$$
$$n\,\frac{\pi}{2} < \frac{L}{2}\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} < (n+1)\,\frac{\pi}{2} \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0\ . \tag{3.2.5}$$

d. Para los estados pares e impares hallados en los incisos anteriores, probar que existe una probabilidad no nula de encontrar a las partículas por fuera del pozo. Determinar la correspondiente longitud de penetración.

e. Probar que las soluciones a la ecuación trascendente (3.2.5) se reduce a las soluciones halladas en el problema 47 para el caso $V_0 \longrightarrow \infty$.

f.* Determinar numéricamente todas las energías para el caso $V_0 = 50\hbar^2/mL^2$. Luego determinar la variación de energía en todas las transiciones posibles entre distintos niveles.
Sugerencia: definir la variable adimensional $z = \sqrt{mL^2E/2\hbar^2}$ y la constante adimensional $z_0 = \sqrt{mL^2V_0/2\hbar^2}$. Luego reescribir la ecuación trascendente en términos de z y z_0. Fijando z_0 adecuadamente, resolver numéricamente.

49.†*Seguir los siguientes pasos para encontrar soluciones aproximadas a las energías del pozo finito sin recurrir al cálculo numérico.

Una aproximación para la función coseno en el dominio $(-\pi/2, \pi/2)$, debida a de O. F. de Alcántara Bonfim y D. J. Griffiths, expresa:

$$\cos(x) \approx \frac{1 - 4x^2/\pi^2}{\sqrt{1 + cx^2}}\ , \tag{3.2.6}$$

donde c es una constante positiva.

a. Verificar con un programa gráfico que la anterior aproximación es buena para varios valores de $c \in [0, 1/2]$.

b. Definiendo la constante $D := \pi^2c/4 + 2$, probar que dicha aproximación para el coseno permite aproximar a la tangente en el dominio $(-\pi/2, \pi/2)$ mediante

$$\tan(x)^2 \approx \frac{4x^2}{\pi^2}\frac{D - 4x^2/\pi^2}{(1 - 4x^2/\pi^2)^2}\ . \tag{3.2.7}$$

Esta aproximación puede ser extendida a cualquier intervalo de la forma $\big(n\pi/2, (n+1)\pi/2\big)$ con $n \in \mathbb{N}_0$, simplemente desplazando el argumento:

$$\tan(x)^2 \approx \frac{4(x - n\pi/2)^2}{\pi^2}\frac{D - 4(x - n\pi/2)^2/\pi^2}{[1 - 4(x - n\pi/2)^2/\pi^2]^2}\ . \tag{3.2.8}$$

c. Usar la anterior aproximación junto con la ecuación (3.2.5) y las definiciones de z y z_0 dadas en el inciso 48f, para probar:

$$\frac{4(z - n\pi/2)^2}{\pi^2}\frac{D - 4(z - n\pi/2)^2/\pi^2}{[1 - 4(z - n\pi/2)^2/\pi^2]^2} \approx \frac{z_0^2 - z^2}{z^2} \quad , \quad n\frac{\pi}{2} < z < (n+1)\frac{\pi}{2}\ . \tag{3.2.9}$$

d. Probar que para el estado fundamental ($n = 0$) se obtiene una ecuación cuadrática respecto a z^2. Resolverla.

e. Probar que si se elige $c = 0$, se obtiene la siguiente cuadrática para z:

$$1 - \frac{4(z - n\pi/2)^2}{\pi^2} \approx \frac{z}{z_0} \ . \tag{3.2.10}$$

Verificar que en el límite $V_0 \longrightarrow \infty$ se recuperan las energías del pozo infinito halladas en el problema 47.

3.3 El oscilador armónico

50. Considerar el potencial armónico

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \ .$$

a. Mediante las sustituciones lineales $q = x\sqrt{m\omega/\hbar}$ y $\epsilon = E/\hbar\omega$, probar que es posible adimensionalizar la ecuación de Schrödinger según

$$\left(-\frac{d^2}{dq^2} + q^2 \right) \Psi = 2\epsilon\Psi \ . \tag{3.3.1}$$

b. Probar que la sustitución $\Psi(q) = N\, e^{-q^2/2}\, H(q)$ (donde N es una constante de normalización que no se tendrá en cuenta en el presente problema) convierte a la ecuación anterior en la *ecuación de Hermite*

$$\left(\frac{d^2}{dq^2} - 2q\frac{d}{dq} + (2\epsilon - 1) \right) H(q) = 0 \ . \tag{3.3.2}$$

c. Proponiendo una solución en serie de potencias (método de Frobenius-Fuchs) de la forma

$$H(q) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, q^i \ , \tag{3.3.3}$$

hallar una relación de recurrencia entre los coeficientes a_i. Justificar que puedan considerarse a las soluciones pares e impares separadamente.

d. Probar que $H(q) \sim e^{q^2}$ para grandes valores de q, a menos que la serie se corte (es decir, que la serie sea en realidad un polinomio). ¿Por qué no se desean soluciones tales que $H(q) \sim e^{q^2}$ para grandes valores de q?

Sugerencia: estudiar el comportamiento de los coeficientes para grandes valores del índice i

e. Cortando la serie en $i = n \in \mathbb{N}_0$, probar que las energías del oscilador armónico están dadas por $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$.

51. Considerar la ecuación de Schrödinger adimensionalizada para el oscilador armónico, dada por (3.3.1).

a. Probar que la misma puede ser escrita en la forma

$$\left(-\frac{d}{dq}+q\right)\left(\frac{d}{dq}+q\right)\Psi=(2\epsilon-1)\Psi\ . \tag{3.3.4}$$

b. Defínase el *operador de aniquilación* $\hat{a}$ y el *operador de creación* $\hat{a}^\dagger$ según

$$\hat{a}:=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dq}+q\right)\ ,\qquad \hat{a}^\dagger:=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dq}+q\right)\ , \tag{3.3.5}$$

donde uno es el operador adjunto del otro. Defínase además el *operador número de ocupación* $\hat{N}:=\hat{a}^\dagger\hat{a}$ (también llamado simplemente *operador número*). Determinar los conmutadores

$$[\hat{a},\hat{a}^\dagger]\ ,\qquad [\hat{N},\hat{a}]\ ,\qquad [\hat{N},\hat{a}^\dagger]\ . \tag{3.3.6}$$

c. Sea $|n\rangle$ un autoestado del operador $\hat{N}$ (es decir, $\hat{N}|n\rangle=n|n\rangle$). Calcular:

$$\hat{N}\big(\hat{a}|n\rangle\big)\ ,\qquad \hat{N}\big(\hat{a}^\dagger|n\rangle\big)\ . \tag{3.3.7}$$

Concluir entonces que debe cumplirse $\hat{a}|n\rangle\propto|n-1\rangle$ y $\hat{a}^\dagger|n\rangle\propto|n+1\rangle$.

d. Recuperando las dimensiones, probar que el hamiltoniano del oscilador armónico puede ser escrito como

$$\hat{H}=\hbar\omega\left(\hat{N}+\frac{1}{2}\right)\ . \tag{3.3.8}$$

A partir de este resultado y del inciso anterior, justificar la interpretación de $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ como operadores de aniquilación y creación de cuantos, respectivamente.

e. Probar que si $n=0$, entonces $\hat{a}|0\rangle=0$.
Sugerencia: calcular $||\,\hat{a}|0\rangle\,||^2$.

f. Probar que $\langle n|m\rangle=0$ si $n\neq m$.
Sugerencia: comenzar verificando que $\hat{N}$ es hermítico y calcular $\langle n|\hat{N}|m\rangle$.

g. Normalizando los autoestados de $\hat{N}$ según $\langle n|m\rangle=\delta_{nm}$, hallar las constantes de proporcionalidad en las relaciones $\hat{a}|n\rangle\propto|n-1\rangle$ y $\hat{a}^\dagger|n\rangle\propto|n+1\rangle$ obtenidas en el inciso 51c.

h. Demostrar

$$|n\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle\ . \tag{3.3.9}$$

i. Calcular los elementos de matriz de los operadores $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ y $\hat{N}$ en la base $\{|n\rangle\}$.

j. Recuperando las dimensiones, escribir a los operadores $\hat{x}$ y $\hat{p}$ en términos de los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$.

k. Calcular los valores de expectación $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{x}^2\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$ y $\langle\hat{p}^2\rangle$ respecto del estado $|n\rangle$. Usar estos resultados para calcular el producto de las incertezas $\Delta x\,\Delta p$.

52.* Se definen los *estados coherentes* $|\alpha\rangle$ del oscilador armónico unidimensional como autoestados del operador (no hermítico) de aniquilación $\hat{a}$ con autovalor complejo α. Es decir, $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$.

a. Probar que

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\, e^{\alpha\,\hat{a}^\dagger}|0\rangle \tag{3.3.10}$$

es un estado coherente normalizado.

b. Probar que estos estados saturan la cota del principio de incerteza.

c. Expandiendo $|\alpha\rangle$ como

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)|n\rangle\ , \tag{3.3.11}$$

mostrar que la distribución de probabilidades $|f(x)|^2$ es del tipo Poisson.

d. En el esquema de Schrödinger es posible tener $\alpha(t)$. Emplear el teorema de Ehrenfest para probar que $\alpha(t) = \alpha_0\, e^{-i\omega t}$. Concluir que estos estados coherentes representan soluciones clásicas del oscilador armónico.

3.4 Ec. de Schrödinger - casos unidimensionales

53. a. Hallar la función de onda más general dependiente del tiempo para el caso libre ($\hat{V} = 0$).

b. Hallar la solución particular con la condición inicial $\Psi(x, t = 0) = \delta(x - x_0)$, correspondiente a una partícula inicialmente localizada en la posición x_0.

Sugerencia: usar el resultado del problema 39. Si resolvió la ecuación de difusión resultante en la materia Matemáticas Especiales II, entonces puede copiar el resultado. Finalmente, deshacer la rotación de Wick.

54. Considerar la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para el potencial $V(x) = -\alpha\,\delta(x)$.

a. Hallar todos los estados ligados y sus energías.

Sugerencia: resolver separadamente para las regiones $x < 0$ y $x > 0$. Para hallar cómo se conectan las dos regiones, integrar la ecuación de Schrödinger en un pequeño entorno centrado en $x = 0$.

b. Para el caso de estados no ligados, considerar una onda incidente desde la izquierda y hallar los coeficientes de transmisión y reflexión.

c. Para el caso de estados no ligados, considerar una onda incidente desde la derecha y hallar los coeficientes de transmisión y reflexión.

d.* Construir la matriz S definida en el problema 41 y verificar explícitamente que sus entradas satisfacen las relaciones obtenidas en el inciso 41h.

55. Considerar la ecuación de Schrödinger adimensionalizada (3.1.10) para el caso unidimensional. Suponer que existe una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $v(x) = f'(x)^2 - f''(x)$.

a. Probar que la ecuación de Schrödinger puede ser reescrita como

$$\Big(-\frac{d}{dx}+f'(x)\Big)\Big(\frac{d}{dx}+f'(x)\Big)\Psi(x)=\epsilon\,\Psi(x). \tag{3.4.1}$$

b. Hallar un estado de energía cero.

c. Probar que $\epsilon \geq 0$.

Sugerencia: multiplicar la ecuación de Schrödinger por $\Psi(x)^*$ e integrar una vez por partes.

d. Hallar un estado con energía cero para el caso $v(x) = 1 - 2/\cosh(x)^2$ y probar que todas las energías son positivas.

Sugerencia: recordar la identidad hiperbólica $\tanh(x)^2 = 1 - 1/\cosh(x)^2$, así como la derivada y la integral de la tangente hiperbólica: $\tan'(x) = 1/\cosh(x)^2$, $\int dx\ \tanh(x) = \ln\big(\cosh(x)\big) + C$.

e. Hallar una cota inferior para ϵ en el caso $v(x) = -\beta/\cosh(x)^2$ con $\beta > 0$. Luego hallar un estado donde ϵ sea igual a dicha cota inferior.

Sugerencia: comenzar proponiendo una función $f(x)$ que sea igual a una constante real α multiplicada por la función $f(x)$ hallada en el inciso anterior. Luego hallar α como función de β.

56.† Considerar en $\mathbb{R}$ al pozo de potencial de Morse

$$V(x) = D_e\Big(1-e^{-x/L}\Big)^2\,, \tag{3.4.2}$$

donde D_e es la profundidad del pozo y L está relacionado a su ancho.

a. Adimensionalizar el potencial de Morse según la expresión

$$v(x) = \lambda^2\Big(1-e^{-x}\Big)^2\,. \tag{3.4.3}$$

¿Cómo se relaciona la constante adimensional λ^2 con los parámetros dimensionales D_e y L?

b. Probar que el potencial de Morse es equivalente al potencial

$$v(x) = \lambda^2\Big(e^{-2x}-2e^{-x}\Big)\,. \tag{3.4.4}$$

c.* Teniendo en cuenta el ejercicio 55, probar que se puede generar el potencial de Morse –a menos de una constante aditiva– a partir de la función $f(x) = \lambda e^{-x} + (\lambda - 1/2)x$. Concluir entonces que el estado fundamental está dado por

$$\Psi_0(x) = N_0\ \exp\big(-\lambda e^{-x}\big)e^{-(\lambda-1/2)x}\,. \tag{3.4.5}$$

d. Planteando la sustitución $z = 2\lambda e^{-x}$ y llamando $\phi(z) := \Psi(x)$, probar que la ecuación de Schrödinger se convierte en

$$-z^2\,\phi''(z) - z\,\phi'(z) + \left(\frac{z^2}{4}-\lambda z\right)\phi(z) = \epsilon\,\phi(z)\,. \tag{3.4.6}$$

e. Los *polinomios asociados de Laguerre* $L_n^{(\alpha)}(x)$ son todas las soluciones posibles de la ecuación diferencial

$$\left(x\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha+1-x)\frac{d}{dx} + n\right)L_n^{(\alpha)}(x) = 0 \tag{3.4.7}$$

con $n \in \mathbb{N}_0$. Usar esto para probar que las funciones

$$\phi_n(z) = N_n\, z^{\lambda-n-1/2}\, e^{-z/2}\, L_n^{(2\lambda-2n-1)}(z)\ , \tag{3.4.8}$$

donde N_m es una constante de normalización (que no hace falta determinar), son soluciones de la ecuación diferencial hallada en el inciso anterior, con autovalores

$$\epsilon_n = -\left(\lambda - n - \frac{1}{2}\right)^2 . \tag{3.4.9}$$

f. Determinar el número total de estados ligados compatibles con las soluciones previas.

   Sugerencia: recordar que $\Psi(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$. Traducir esta condición en términos de $\phi(z)$.

g. Recuperando las dimensiones, hallar las constantes ω y χ tales que las energías puedan ser escritas como

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) - \hbar\omega\chi\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 . \tag{3.4.10}$$

   A ω se la llama *frecuencia armónica* asociada al potencial de Morse, y a χ se lo denomina *coeficiente de anarmonicidad.*

3.5 Ec. de Schrödinger - casos multidimensionales

57. Considerar una partícula de masa m en D dimensiones que se encuentra completamente confinada a una caja rectangular, de manera que el potencial se escribe como

$$V(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } -L_i/2 < x_i < L_i/2 \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases} , \tag{3.5.1}$$

donde L_i es la longitud de las aristas de la caja en la i-ésima dimensión.

a. Resolver la correspondiente ecuación de Schrödinger.

   Sugerencia: probar que el potencial es separable en coordenadas cartesianas.

b. Para el caso tridimensional con todos los lados de la caja iguales ($L_1 = L_2 = L_3$), escribir la energía del estado fundamental y de los primeros cuatro estados excitados. Determinar la degeneración de estos cinco niveles.

c. Explicar la degeneración de cada uno de los cinco niveles del inciso anterior en términos de simetrías.

58. Considerar el oscilador armónico tridimensional, cuyo potencial está dado por

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}m\big(\omega_x^2\,x^2 + \omega_y^2\,y^2 + \omega_z^2\,z^2\big)\ , \tag{3.5.2}$$

donde a las frecuencias ω_x, ω_y y ω_z se las denomina *frecuencias características.*

a. Resolver la correspondiente ecuación de Schrödinger.
b. Para el caso isotrópico ($\omega_x = \omega_y = \omega_z$), determinar la degeneración del k-ésimo estado excitado.
c. Explicar, en términos de simetrías, por qué el estado fundamental no es degenerado en el caso isotrópico.
d. Explicar, en términos de simetrías, la degeneración del primer estado excitado en el caso isotrópico.

59. Considerar un oscilador armónico bidimensional isotrópico de frecuencia ω, al cual se lo perturba con un término de la forma $m\omega_p^2\,xy$ en el potencial. Se denominará a ω_p como la *frecuencia de la perturbación*, y se supondrá $0 < \omega_p < \omega$. Resulta así que el potencial está dado por

$$V(x,y) = \frac{1}{2}m\omega^2\big(x^2 + y^2\big) + m\omega_p^2\,xy\ . \tag{3.5.3}$$

Probar que las energías están dadas por

$$E_{n_1 n_2} = \hbar\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\sqrt{\omega^2 + \omega_p^2}\left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\ , \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0\ . \tag{3.5.4}$$

Sugerencia: escribir al potencial en la forma

$$V(x,y) = \frac{1}{2}m\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ , \tag{3.5.5}$$

donde A es una matriz simétrica de 2×2. Luego realizar un cambio de coordenadas que diagonalize a A.