Mecánica Cuántica II

Prof. Aníbal Iucci
JTP Alejo Costa

Práctica 5: Ecuación de Dirac

Año 2024

1. Ecuación de Klein-Gordon

1. **Repaso grupo de Lorentz**

   a) Sea f una funcion dos veces diferenciable y campo escalar frente a transformaciones de Lorentz, es decir
   $$f'(\Lambda x) = f(x)$$
   siendo Λ una transformación de Lorentz. ¿Cómo transforma $\partial_\mu f$ y $\partial_\mu \partial^\mu f$ frente a Λ?

   b) 1) Sea $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ con $|\boldsymbol{v}| < 1$ y $\gamma(v) = 1/\sqrt{1-v^2}$ (tomamos $c = 1$). Muestre que los boosts de Lorentz
   $$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma(v) & \gamma(v)\boldsymbol{v}^T \\ \gamma(v)\boldsymbol{v} & \mathbb{I}_3 + \frac{\gamma(v)-1}{v^2}\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T \end{pmatrix}$$
   preservan distancias en el espacio de Minkowski.

2. **Corriente en la ecuacion de Klein-Gordon**

   a) Muestre que si ψ cumple la ecuación de Klein-Gordon, entonces la tetracorriente
   $$j^\mu(x) = \mathrm{Im}(\psi(x)\partial^\mu \psi^*(x))$$
   cumple la ecuación de continuidad $\partial_\mu j^\mu = 0$ y transforma como un vector frente a transformaciones de Lorentz.

   b) Muestre que la densidad j^0 puede ser negativa para algunas soluciones de la ecuación de KG (use como ejemplo ondas planas con energía negativa)

3. **Ecuación de Klein-Gordon con campo**

   a) Considere la ecuación de Klein-Gordon en presencia de un campo electromagnético $A^\mu = (A^0, \boldsymbol{A})$. Introduzca la interacción con un acoplamiento mínimo y tome el límite no relativista.

   b) Analice la corriente j^μ en presencia de un campo.

4. **Paradoja de Klein**

   Encuentre los coeficientes de transmisión y reflexión en la ecuación de Klein-Gordon para un potencial unidimensional $V = V_0 \Theta(x)$

2. Ecuación de Dirac

1. **Grupo de Lorentz y sus representaciones**

   a) Considere los generadores del grupo de Lorentz, $(\mathcal{M}^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = i(g^{\rho\nu} g^\sigma{}_\nu - g^{\sigma\mu} g^\rho{}_\nu)$. Se trata de 6 matrices de 4×4 ya que la definición es antisimétrica ante el intercambio de los índices ρ, σ que identifican cada matriz. Podemos encontrar una representación de los elementos del grupo de Lorentz, que se encuentren conectados de manera continua con la identidad, mediante la exponenciación de los generadores, esto es $\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\Omega_{\rho\sigma}\mathcal{M}^{\rho\sigma}}$, con $\Omega_{\rho\sigma} \in \mathcal{R}$ y antisimétrico en ρ, σ. Esta representación es la que actúa en el espacio de cuadrivectores, es la representación irreducible llamada $(1/2, 1/2)$. Construya las transformaciones de cuadrivectores para boosts en el eje x y rotaciones en el eje z.

   b) Muestre que la ecuación de Klein-Gordon es invariante ante transformaciones de Lorentz.

   c) Considere las matrices $\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$. Muestre que satisfacen:

1) $[\Sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = i(\gamma^\mu g^{\nu\rho} - \gamma^\nu g^{\rho\nu})$
2) El álgebra $[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\rho\sigma}] = i\left(\Sigma^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - \Sigma^{\nu\sigma} g^{\mu\rho} - \Sigma^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + \Sigma^{\nu\rho} g^{\mu\sigma}\right)$. Por lo tanto, estas matrices son también generadores del grupo de Lorentz y forman una representación $S[\Lambda] = e^{-\frac{i}{2}\Omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}}$. Mientras que las matrices Λ transforman cuadrivectores, las $S[\Lambda]$ actúan sobre el espacio de bispinores $\psi(x)$, esto es:

$$
\begin{aligned}
&x \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\
&A^\mu(x) \to A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x') \\
&\psi^a(x) \to \psi'^a(x') = S[\Lambda]^a{}_b \psi^b(\Lambda^{-1}x')
\end{aligned}
$$

d) Muestre que la ecuación de Dirac es invariante ante transformaciones de Lorentz, representadas por las matrices S.

e) Muestre que $\bar{\psi}\psi$ es un escalar, $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ es un cuadrivector, y $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ un pseudoescalar. ¿Es $\psi^\dagger\psi$ un escalar? Indique cómo se transforma ante rotaciones y boosts.

f) Muestre que si los cuadrivectores A_μ y B_μ conmutan con las matrices γ^μ se satisface $(A_\mu\gamma^\mu)(B_\nu\gamma^\nu) = A_\mu B^\mu + \frac{1}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] A_\mu B_\nu$.

g) Encuentre la matriz $S[\Lambda]$ para un boost en la dirección del eje x, una rotación en la dirección del eje z y la matriz de transformación ante paridad. Escríbalas explicitamente en la representación de Dirac. ¿Qué ocurre para una rotación en un ángulo de 2π?

2. **Momento angular y spin**

a) Sea $H = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}$ donde $\boldsymbol{S}$ es el operador de spin no relativista.

1) Muestre que $[H, \boldsymbol{J}] = 0$ donde $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ es el impulso angular total.
2) ¿Conmuta H con $\boldsymbol{L}$ o $\boldsymbol{S}$? ¿Es invariante ante transformaciones de paridad?

b) Considere ahora $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$. Verifique que $[\not{p}, J^{\mu\nu}] = 0$, donde $J^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + \hbar\Sigma^{\mu\nu}$. Muestre que $\not{p}\psi$ transforma como un espinor ante paridad.

3. **Transformaciones discretas**

Sea ψ una solución de la ecuación de Dirac

a) Muestre que para inversión temporal ($x = (t, \boldsymbol{x}) \to x' = (-t, \boldsymbol{x})$) la función $\psi'(\boldsymbol{x}') = B\psi^*(x)$ con $B(\gamma^{0*}, -\boldsymbol{\gamma}^*)B^{-1} = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$ y $B = \gamma^1\gamma^2$, satisface la ecuación de Dirac en las coordenadas x'.

b) Pruebe que la corriente de Dirac transforma bajo paridad e inversión temporal segun

$$\bar{\psi}'(x)\gamma^\mu\psi'(x') = (-1)^{-\delta^\mu_0}\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$$

Donde la transformación de paridad queda definida segun $x = (t, \boldsymbol{x}) \to x' = (t, -\boldsymbol{x})$ y $\psi'(x') = \gamma^0\psi(x)$

c) Muestre que si $\psi(x)$ satisface la ecuación

$$\left[\gamma^\mu\left(i\partial_\mu - eA_\mu(x)\right) - m\right]\psi(x) = 0$$

con $A: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un campo vectorial, entonces la función de onda conjugada en carga, $\psi'(x) = C\bar{\psi}^t(x)$ con $C(\gamma^\mu)^t C^{-1} = -\gamma^\mu$ y $C = i\gamma^0\gamma^2$ satisface la ecuación anterior con carga e en vez de $-e$.

4. **Soluciones de la ecuación de Dirac: Partícula libre**

Obtenga las soluciones normalizadas de la ecuación de Dirac para partículas libres con impulso $(0, 0, p_z)$. Hágalo:

a) directamente de la ecuación.

b) mediante la aplicación de un boost a la solución en el sistema donde la partícula está en reposo.

5. **Paquetes de ondas**

a) Encuentre la evolución temporal de la función de onda que a $t = 0$ satisface $\psi(0, \boldsymbol{r}) = Ae^{ikz}u$ donde

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en la representación de Dirac. Encuentre la densidad de corriente.

b) Ídem para un paquete de ondas gaussiano que a tiempo $t = 0$ satisface

$$\psi(0, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{(\pi d^2)^{3/4}} e^{-|r|^2/2d^2} u.$$

Muestre que los coeficientes de la expansión de $\psi(t, \boldsymbol{r})$ correspondientes a estados de energía negativa son apreciables sólo si $d \lesssim \frac{\hbar}{mc}$

6. **Quiralidad y helicidad**

a) Escriba la ecuación de Dirac en la representación quiral. Muestre que para soluciones $\psi = \begin{pmatrix} \phi_r \\ \phi_L \end{pmatrix}$ de energía E se obtiene

$$(E - c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p})\phi_R = -mc^2 \phi_L \tag{1}$$

$$(E + c\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p})\phi_L = -mc^2 \phi_R \tag{2}$$

b) Para partículas de masa nula o muy pequeña se obtienen dos ecuaciones desacopladas. Encuentre explícitamente la solución en ese caso.

c) Muestre que la helicidad no es invariante de Lorentz.

d) Pruebe que la quiralidad γ^5 es un buen número cuántico, que coincide con la helicidad para estados de energía positiva y es opuesta para los de energía negativa.

e) ¿Poseen las solcuiones del tipo $\begin{pmatrix} \phi_R \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ \phi_L \end{pmatrix}$ paridad definida?

7. **Paradoja de Klein, devuelta**

Encuentre los coeficientes de reflexión y transmisión para un electrón de energía $E > 0$ y helicidad positiva que viaja en la dirección z que incide sobre un escalon de potencial electrostático de altura V al pasar por $z = 0$. Considere los casos $E > V + mc^2$, $|E - V| < mc^2$ y $E < V - mc^2$. Discuta este último caso.

8. **Invarianza de gauge y factor giromagnético**

a) Escriba la ecuación de Dirac para una partícula cargada en presencia de un campo electromagnético y verifique la invarianza de gauge.

b) Deduzca el acoplamiento de Pauli entre el spin y el campo magnético. Obtenga el factor giromagnético $g = 2$. Experimentalmente g es un poco mayor que 2 y esto puede ser predicho con mucha precisión utilizando electrodinámica cuántica, *QED* ¿Cuál es la principal diferencia entre ese tratamiento y el utilizado acá?

9. **Problema de Landau**

Resuelva la ecuación de Dirac para un electrón en un campo magnético $\boldsymbol{B}$ homogéneo y constante que apunta en la dirección del eje z (puede utilizar, por ejemplo, el gauge $A^0 = A^x = A^z = 0$ y $A^y = Bx$). Muestre que los niveles de energía están dados por la expresión

$$\frac{E_{nsp_z}^2 - m^2c^4}{2mc^2} = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{h\bar{|}eB|}{m}(n + 1/2 - s)$$

donde $n = 0, ...,$ $s = \pm 1/2$ y $-\infty < p_z < p_z$. Discuta la degeneración de los niveles.

10. **Átomo hidrogenoide**

Muestre que el hamiltoniano de Dirac para un átomo hidrogenoide conmuta con el momento angular total $J_i = L_i + \Sigma_i$. Calcule el hamiltoniano en los subespacios de momento angular definido y encuentre los estados estacionarios resolviendo la ecuación radial correspondiente. Calcule el espectro de energía y luego estudie el límite no-relativista. ¿Qué sucede para $Z \gtrsim 137$?