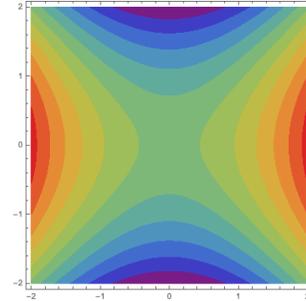
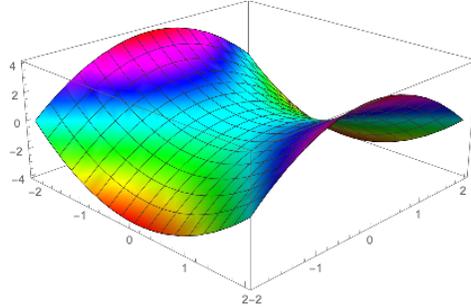


**Práctica V: Expansiones asintóticas**



*“Divergent series are the invention of the devil and it is a shameful to base any proof on them”*  
 N. H. Abel, Carta a Holmboe, 1826

1. erf(x): de la expresión de la función error

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \quad (1)$$

notamos que la contribución dominante de la integral proviene del límite inferior  $t = x$ . Analizar el siguiente esquema de aproximación:

(i) Mediante el cambio de variables  $t^2 = x^2 + u$  en (1) obtener

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\left(1 + \frac{u}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}} du$$

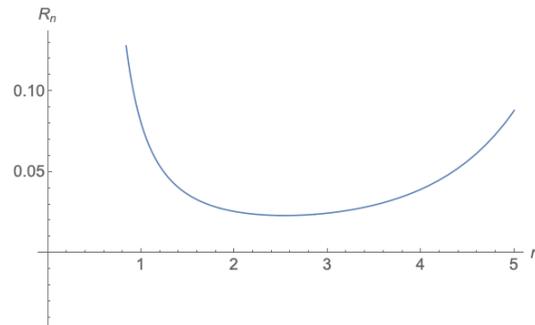
(ii) Expandiendo el denominador en potencias de  $f$  hallar

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{8x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_1^\infty \left(\frac{1}{-4x^2}\right)^n \frac{(2n-3)!}{(n-2)!}$$

Expresión que coincide con la obtenida en clase mediante sucesivas integrales por partes.

(iii) Verificar que el radio de convergencia de la serie es nulo.

(iv) Dado que es una serie alternante, analizar el resto como función de  $n$  para distintos valores de  $x$ . Graficarlo y observar que el comportamiento es de la forma de la figura



Inferir entonces que hay una elección óptima en la suma parcial para minimizar el error.

2. Abel vs Euler. El origen: consideremos la ecuación diferencial (Euler, 1754)

$$x^2 y' + y = x \quad (2)$$

(i) Mostrar que la solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = c e^{\frac{1}{x}}, \quad c \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Esta función presenta una singularidad esencial en  $x = 0$ :

- . finita acercándonos por el eje real negativo  $y_h(0^-) = 0$ .
- . divergente acercándonos por eje real positivo  $y_h(0^+) \rightarrow +\infty$ .

(ii) Dado que (2) es una ecuación lineal, la solución particular se encuentra fácilmente proponiendo  $y_p = y_h(x) c(x)$ . Formalmente obtenemos

$$y_p(x) = e^{\frac{1}{x}} \int_0^x \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z} dz = \int_0^x \frac{e^{\frac{1}{z} - \frac{1}{x}}}{z} dz = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\zeta}{x}}}{1 + \zeta} d\zeta = x \underbrace{\int_0^\infty \frac{e^{-w}}{1 + xw} dw}_{-e^{\frac{1}{x}} \text{Ei}(-\frac{1}{x})} \quad (4)$$

donde Ei es la función integral exponencial. Para  $x > 0$  esta expresión resulta ser la solución (regular) completa. La solución de (2) para  $x \leq 0$  no está unívocamente definida, es ambigua! Esto se debe tanto a la presencia del polo en el camino de integración, como a la posibilidad de sumar la solución homogénea (4) con un coeficiente arbitrario. Mas aún, el coeficiente  $c$  en (3) no queda determinado por la C.I. en  $x = 0$ .

(iii) Resolviendo (2) perturbativamente en potencias de  $x$  obtener

$$y(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n n! x^{n+1} \quad (5)$$

A priori, esta expresión vale  $\forall x$ . Mostrar que para  $x > 0$ , la resumación de Borel está bien definida y conduce a (4). Notar que la solución perturbativa no presenta la existencia de una constante indeterminada  $c$  (asociada a la solución homogénea).

(iv) La integral (4) para  $x < 0$  presenta un polo en el camino de integración. Desplazando el polo afuera del eje real positivo  $1 + xw \rightarrow 1 + xw \pm i\epsilon$ , mostrar, usando Sokhotski-Plemelj, la aparición de una parte imaginaria<sup>1</sup>

$$x < 0 : \quad \Im(y_p(x \pm i\epsilon)) = \mp \pi \exp\left[\frac{1}{x}\right] \rightsquigarrow \text{no perturbativa en } x!!! \quad (6)$$

(Alternativamente podemos desplazar el camino de integración por arriba o por abajo del eje real positivo definiendo las “resumaciones laterales de Borel”).

Moral: cuando  $x < 0$  la solución particular, dada por la última expresión en (4), esta indefinida debido a la aparición de un polo en el camino de integración. Simultáneamente la serie (5) se vuelve de términos positivos  $\rightsquigarrow$  no sumable Borel. Para definir la función en  $x < 0 \leftrightarrow$  fijar la homogénea es necesario contar con información adicional. La ambigüedad para  $x < 0$  en el presente caso se debe a que Ei presenta un corte de  $(0, -\infty)$  en el plano  $z$ .

La descripción perturbativa (5) es incompleta, no puede representar funciones no analíticas en el origen como  $\ln g$  o  $e^{-1/g}$ . El caracter asintótico de la serie (5) sugiere la existencia de contribuciones no perturbativas del tipo  $e^{1/g}$  para  $g < 0$ .

(v) Hallar una expansión asintótica para  $y_p(x)$  en el límite  $x \rightarrow \infty$

$$y_p \sim (\ln x - \gamma) + \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2} + \dots$$

La aparición de la discontinuidad (6) en el eje negativo se correlata con el logaritmo aquí presente.

<sup>1</sup>Si elegimos prescribir la integral (4) con el valor principal de Cauchy, la parte imaginaria desaparece y la integral es real y bien definida para  $x < 0$ . Mathematica define Ei para  $x < 0$  prescribiendo valor principal de Cauchy.

3. Toy large N: Evaluar la contribución dominante y la primera corrección en  $1/N$  para

$$F(N) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^N dx, \quad N \gg 1$$

4. Stirling: hallar la primera corrección,  $O\left(\frac{1}{n}\right)$ , a la aproximación de Stirling para  $\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt$

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

5. Borel resummation: considerar la serie asintótica

$$\tilde{f}(g) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n n! g^n \quad (7)$$

(i) Mediante la técnica de Borel obtener

$$f(g) = \frac{1}{g} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{t}{g}}}{1+t} dt \quad (8)$$

(ii) Graficar sumas parciales vs. la expresión exacta para  $g > 0$  y hallar la figura 1.

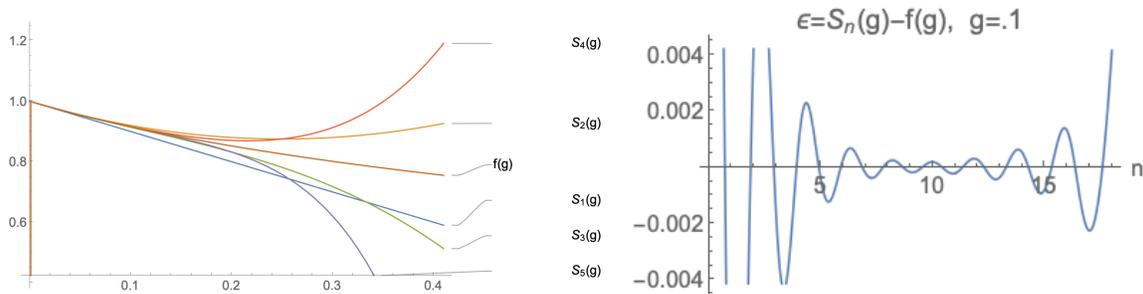


Figure 1: Comparación de las s sumas parciales con la expresión exacta.

(iii) Mas términos arruinan la aproximación: considerar  $g = 0.1$ : para distintos valores de  $n$  evaluar el error entre la suma parcial y el valor exacto dado por  $f(g)$ . Mostrar que el error es mínimo para  $n = 9$  en (7).

(iv) Continuación analítica: Mediante una deformación apropiada del contorno de integración definir la integral para valores  $g < 0$ . Mostrar usando la aproximación de saddle point (válida para  $g \rightarrow 0$ ) que la función (8) presenta una discontinuidad sobre el eje real negativo  $g \lesssim 0$  y evaluarla<sup>2</sup>.

6. Ecuación confluyente hypergeometrica  ${}_1F_1(a, c; z)$ : resolver

$$zw'' + (c - z)w' - aw = 0 \quad (9)$$

Proponiendo una solución de forma integral  $w(z) = \int_{\mathcal{C}} e^{zt} f(t) dt$  obtener  $f(t) = (t-1)^{c-a-1} t^{a-1}$ . El contorno  $\mathcal{C}$  se determina pidiendo que se anule  $e^{zt} t^a (1-t)^{c-a} |_{\partial\Gamma} = 0$ . Dependerá, entonces, de los valores particulares de  $a, c$  y  $a - c$ . (9) también se la conoce como ecuación de Kummer. Considerada como función de  $a, c$ , or  $z$  con los otros dos constantes  ${}_1F_1$  define una función entera de  $a$  o  $z$ , excepto cuando  $c = 0, -1, -2, \dots$

7. Función de Airy: resolver la ecuación de Airy<sup>3</sup>

$$\frac{d^2 \psi}{du^2} = u\psi$$

<sup>2</sup>Ayuda: para  $g < 0$ , el integrando (8) presenta un saddle en  $t_0 = -1 - g > -1$ . La figura 2 muestra un gráfico de la parte real de  $h(t) = -t/g - \log(1+t)$  donde se observa el saddle a la derecha del polo, en forma de pico en  $t = -1$ . La idea para definir la integral cuando  $g = e^{i\kappa}|g|$  es rotar el contorno de manera que compensar la fase de  $g$  (ver notas de clase).

<sup>3</sup>George Biddell Airy (1801-1892): 7<sup>mo</sup> Astrónomo real de 1835-1881.

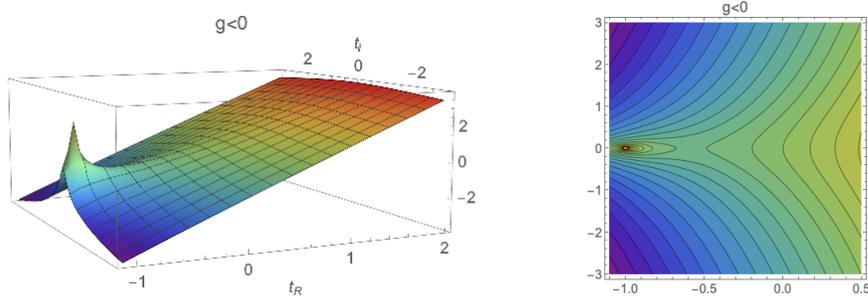
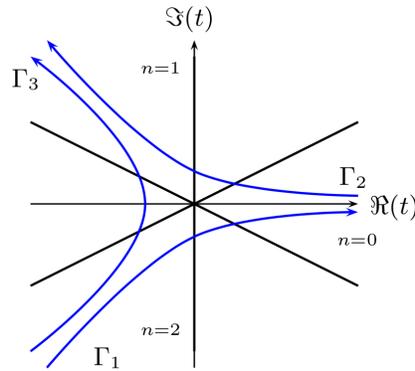


Figure 2: Saddle point de (8) para  $g < 0$

en espacio de momentos. Insertando  $\psi(u) = \int dk e^{iku} \tilde{\psi}(k)$  en la ecuación, obtener la ecuación de primer orden para  $\tilde{\psi}$ ,

$$i \frac{d\tilde{\psi}}{dk} + k^2 \tilde{\psi} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \tilde{\psi} = e^{\frac{i}{3}k^3}$$

La solución obtenida corresponde a  $\text{Ai}(x)$ . La segunda solución linealmente independiente,  $\text{Bi}$ , no es de cuadrado integrable, sin embargo se puede obtener deformando el contorno (ver notas de clase).



## 8. Función de Airy Bi:

(i) Empleando el contorno  $\Gamma_1$  de la figura deformado apropiadamente en la expresión integral

$$w(z) = \int_{\Gamma} e^{zt - \frac{1}{3}t^3} dt$$

obtener

$$\text{Bi}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ e^{z\rho - \frac{1}{3}\rho^3} + \sin \left( z\rho + \frac{1}{3}\rho^3 \right) \right] d\rho$$

(ii) Hallar la aproximación asintótica de Bi para  $z \rightarrow \infty$ .

## 9. Funciones de Bessel y Hankel: la ecuación de Bessel

$$z^2 w''_{\nu}(z) + z w'_{\nu}(z) + (z^2 - \nu^2) w_{\nu}(z) = 0 \quad (10)$$

tiene dos soluciones linealmente independientes  $w_{\nu}^{(1,2)}(z)$ . Es usual emplear distintas bases de soluciones, la conveniencia de las distintas formas depende del problema físico a estudiar.

Existen principalmente dos bases que se caracterizan por comportamientos simples en:

(i)  $z = 0$  donde elegimos  $w_{\nu}^{(1,2)} = (J_{\nu}, J_{-\nu})$  siendo  $J_{\nu}(z) \sim z^{\nu}$  para  $z \ll 1^4$

<sup>4</sup>Cuando  $\nu \in \mathbb{N}$  la representación es mas delicada por la aparición de logaritmos en el desarrollo de Frobenius.

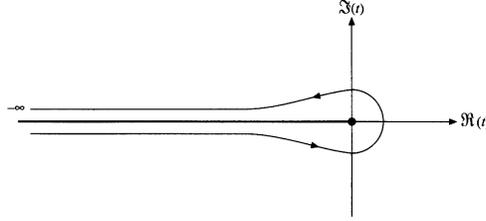
(ii)  $z = \infty$  donde elegimos  $w_\nu^{(1,2)} = (H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)})$ , aquí  $H_\nu^{(1)} \sim e^{iz}$  y  $H_\nu^{(2)} \sim e^{-iz}$  para  $z \gg 1$

Naturalmente podemos expresar una base en términos de las otra. El presente ejercicio muestra que ese hecho se relaciona con que el camino  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ .

(i) Funciones de Bessel  $J_\nu$ : comportamiento simple en el origen

$$\text{Representación de Schl\"afli: } J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})} t^{-\nu-1} dt \quad \rightsquigarrow \quad J_\nu(z) \sim z^\nu \quad \text{para } |z| \ll 1 \quad (11)$$

donde  $\mathcal{C}$  es el camino que encierra el corte de  $t^{-\nu}$  ubicado en el eje real negativo<sup>5</sup>.



Mostrar que al insertar  $J_\nu$  en (10), el integrando es una derivada total

$$\frac{d}{dt} \left( \exp \left[ \frac{z}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \right] t^{-\nu} \left[ \nu + \frac{z}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) \right] \right) \quad (12)$$

Justificar la elección del contorno  $\mathcal{C}$  de la figura.

Hallar la aproximación asintótica de  $J_\nu(x)$  para  $z \rightarrow \infty$  identificando:

- posibles saddles en (11)
- si es posible deformar el contorno para pasar por ellos
- la dirección en la que se debemos ascender a ellos.

Para el caso de  $\nu \in \mathbb{N}$  no existe corte en el eje real negativo y podemos tomar  $\mathcal{C} =$  círculo unitario. Mostrar que la expresión (11) se reduce a

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(z \sin \theta - n\theta)}$$

(ii) Funciones de Hankel: comportamiento simple en infinito

(a) Mostrar que podemos elegir alternativamente las siguientes soluciones de (10)

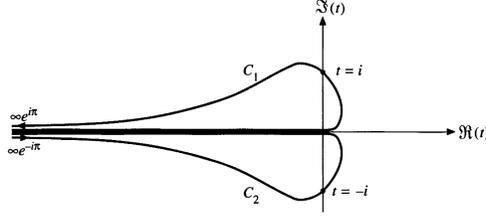
$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= \frac{1}{\pi i} \int_{\mathcal{C}_1} e^{\frac{z}{2}(t-1/t)} \frac{dt}{t^{\nu+1}} & \text{donde } \int_{\mathcal{C}_1} &= \int_0^\infty e^{i\pi} \\ H_\nu^{(2)}(z) &= \frac{1}{\pi i} \int_{\mathcal{C}_2} e^{\frac{z}{2}(t-1/t)} \frac{dt}{t^{\nu+1}} & \text{donde } \int_{\mathcal{C}_2} &= \int_\infty^0 e^{-i\pi} \end{aligned} \quad (13)$$

donde  $\mathcal{C}_{1,2}$  son caminos que salen del origen y alcanzan infinito por arriba y por debajo del corte en el eje negativo. En particular justificar que la elección de caminos es correcta y analizando la cancelación de los términos de borde (12) determinar cómo debemos acercarnos al origen.

(b) Aproximar  $H_\nu^{(1)}$  para  $z \rightarrow \infty$  obteniendo

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(\nu \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} \underbrace{e^{iz}}_{\text{solo onda saliente}} \quad (14)$$

<sup>5</sup>Para  $\nu \neq n \in \mathbb{N}$  las soluciones  $J_\nu, J_{-\nu}$  son independientes.



Comparar  $\mathcal{C}_{1,2}$  con el ítem (i). Concluir que la razón para el comportamiento simple en infinito de  $H^{(1,2)}$  se deriva del hecho de que los caminos  $\mathcal{C}_{1,2}$  tiene *solo* un saddle en  $t = \pm i$ . Puesto que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$  inferir que  $J_\nu = AH_\nu^{(1)} + BH_\nu^{(2)}$  y determinar  $A, B$ .

(iii) Bessel modificadas  $I_\nu, K_\nu$ : son las soluciones de (10) haciendo  $z \rightarrow iz$ , esto es

$$z^2 v_\nu''(z) + z v_\nu'(z) - (z^2 + \nu^2) v_\nu(z) = 0$$

la base de soluciones se expresa en terminos de

$$I_\nu(z) \equiv i^{-\nu} J_\nu(iz) \quad K_\nu(z) \equiv \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz)$$

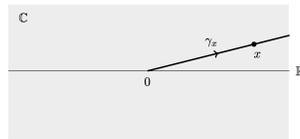
Determinar los dos primeros órdenes de la expansión asintótica de  $K_\nu(x)$  usando

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}(s+1/s)} \frac{ds}{s^{1-\nu}}$$

*“The series is divergent; therefore we may be able to do something with it”*  
O. Heaviside.

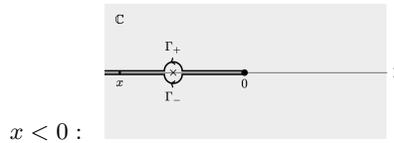
—  
Notas

Resurgencia: si consideramos  $x \in \mathbb{C}$ , la expresión (4) es convergente y define una función analítica siempre que  $\Re(x) > 0$  (semiplano derecho). Es posible extenderla al semiplano izquierdo si consideramos una modificación del contorno de integración como indicamos en la siguiente figura



$$y(x) = \int_{\gamma_x} \frac{e^{-\zeta/x}}{1+\zeta} d\zeta$$

Denotamos por  $\gamma_x$  la recta de 0 a  $\infty$  que pasa por  $x$ . Con esta definición, el exponente  $-\zeta/x$  es siempre real y negativo, decayendo rápidamente. Para  $x \neq \mathbb{R}_{<0}$  el contorno evita el polo del integrando, en  $\zeta = -1$ , dando origen a una función analítica bien definida. Para  $x < 0$  tenemos dos posibles definiciones para  $y(x)$ , estas dependen de si nos acercamos a  $x < 0$  por el semiplano superior  $\Gamma_+$  o inferior  $\Gamma_-$



La extensión analítica conduce entonces a que las mismas difieran en

$$y(x)^+ - y(x)^- = \oint_C \frac{e^{-\zeta/x}}{1+\zeta} d\zeta = 2\pi i e^{1/x} \rightsquigarrow \text{contribución no perturbativa para } x < 0!!$$

donde  $C$  es una curva que encierra  $\zeta = -1$ . Concluimos que la diferencia entre las dos resumaciones laterales es no analítica para  $x \sim 0$  y por lo tanto, no puede ser capturada por la expansión perturbativa en potencias de  $x$ . Precisamente coincide con la solución de la homogénea.

Este fenómeno, en el que una función definida a partir de una serie divergente salta a lo largo de un rayo, es un ejemplo arquetípico del fenómeno de Stokes. El punto clave en la teoría de resurgencia es que el término  $\exp(1/x)$  que da cuenta de la discontinuidad de la función a lo largo del eje real negativo “resurge” a partir del análisis de la serie divergente.

#### Referencias

J.C. Le Guillou and J. Zinn-Justin, *Large-Order Behaviour of Perturbation Theory*, North Holland, 1990.

G. Dunne, *Functional Determinants in Quantum Field Theory*, Lecture notes.

C Pope, *Methods of Theoretical Physics II*, Lecture Notes Texas A&M University.