Práctica 3: Ley de Ohm, Ley de Faraday, Ecuaciones de Maxwell

1. (a) Dos objetos metálicos están inmersos en un material débilmente conductor, cuya conductividad es σ (ver Figura 1). Muestre que la resistencia entre ellos está relacionada con la capacitancia de la disposición de esta manera

$$R = \frac{\epsilon_0}{\sigma C}$$

   (b) Suponga que se conecta una pila entre los objetos 1 y 2 y se carga a ambos a una diferencia de potencial V_0. Si ahora desconecta la pila la carga se pierde gradualmente. Muestre que $V(t) = V_0 e^{-t/\tau}$ y encuentre la constante de tiempo τ en términos de ϵ_0 y σ.

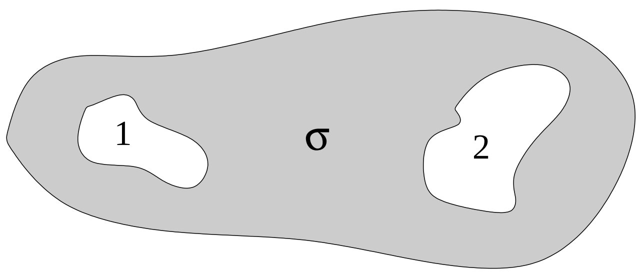

Figura 1

2. Una barra de metal de masa m se desliza sin fricción sobre dos carriles conductores paralelos separados a una distancia l (ver Figura 2). Una resistencia R está conectada entre los carriles y un campo magnético uniforme $\mathbf{B}$, que apunta hacia la hoja, llena toda la región.

   (a) Si la barra se mueve hacia la derecha con velocidad v, ¿cuál es la corriente en la resistencia? ¿En qué dirección fluye la corriente?

   (b) ¿Cuál es la fuerza magnética sobre la barra? ¿En qué dirección?

   (c) Si la barra tiene velocidad v_0 a tiempo $t = 0$ y se la deja deslizar, ¿cuál será su velocidad a un tiempo posterior t?

   (d) La energía cinética inicial de la barra es $mv_0^2/2$. Verifique si la energía entregada a la resistencia es exactamente $mv_0^2/2$.

3. Una determinada línea cerrada es el contorno de un número infinito de superficies diferentes y aún así en la definición del flujo magnético a través de una espira, $\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$, nunca se especifica la superficie a utilizar. Justifique esta aparente omisión.

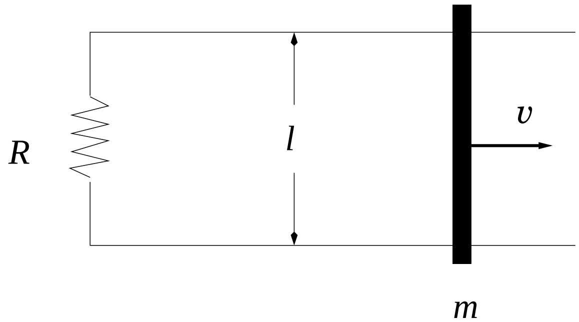

Figura 2

4. En un solenoide largo de radio a circula una corriente alterna de tal forma que el campo interno es cosenoidal: $\mathbf{B}(t) = B_0 \cos(\omega t)\hat{\mathbf{z}}$. Una espira circular de radio $a/2$ y resistencia R está colocada coaxialmente adentro del solenoide. Encuentre la corriente inducida en la espira como función del tiempo.

5. Un campo magnético uniforme $\mathbf{B}(t)$ que apunta para arriba llena la región circular sombreada de la Figura 3. Si $\mathbf{B}$ varía con el tiempo, ¿cuál es el campo eléctrico inducido?

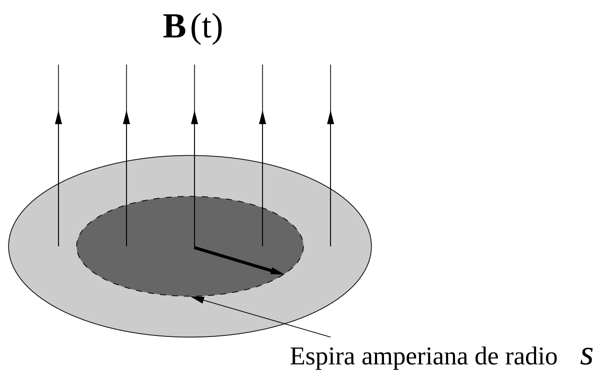

Figura 3

6. Por un solenoide largo de radio a y n vueltas por unidad de longitud pasa una corriente que depende del tiempo, $I(t)$, en la dirección del versor $\hat{\phi}$. Encuentre el campo eléctrico (magnitud, dirección y sentido) a una distancia s del eje (tanto adentro como afuera de solenoide) en la aproximación cuasi estática.

7. Una pequeña espira circular (de radio a) está a una distancia z encima del centro de una espira mayor (de radio b) como muestra la Figura 4. Los planos de las dos espiras son paralelos entre sí y perpendiculares al eje común.

(a) Suponga que una corriente I pasa por la espira mayor. Encuentre el flujo que pasa a través de la espira menor. (La espira menor es tan pequeña que puede considerarse que el campo de la espira grande es constante.)

(b) Suponga que la corriente I pasa por la espira pequeña. Encuentre el flujo a través de la mayor. (La espira menor es tan pequeña que puede considerarse como un dipolo magnético.)

(c) Encuentre las inductancias mutuas y confirme que $M_{12} = M_{21}$.

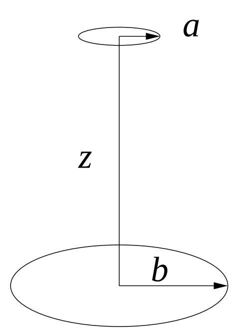

Figura 4

8. Una corriente alterna $I = I_0 \cos(\omega t)$ pasa por un cable largo y recto retornando a través de un tubo conductor coaxial de radio a. El campo eléctrico esta dado por

$$\mathbf{E}(s,t) = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi} \sin(\omega t) \ln\left(\frac{a}{s}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

(a) Encuentre la densidad de corriente de desplazamiento $\mathbf{J}_d$.

(b) Intégrela para obtener la corriente de desplazamiento total,

$$I_d = \int \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{a}.$$

(c) Compare I_d y I. (¿Cuál es el cociente entre ellas?) Si el cilindro externo tuviera 2 mm de diámetro, ¿cuán alta tendría que ser la frecuencia para que I_d fuera el 1% de I? (Este problema muestra por qué Faraday nunca descubrió las corrientes de desplazamiento y por qué normalmente es seguro ignorarlas, a menos que las frecuencia involucradas sean muy altas.)

9. Suponga que

$$\mathbf{E}(r,t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\theta(vt - r)\hat{\mathbf{r}}\,;\ \mathbf{B}(r,t) = 0,$$

donde $\theta(x)$ es la función escalón:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Muestre que estos campos satisfacen todas las ecuaciones de Maxwell y determine ρ y $\mathbf{J}$. Describa la situación física que da lugar a estos campos.