Práctica 3

September 1, 2015

1 Modelo de la Gota Líquida (LDM)

1. En el LDM, la energía clásica de la gota cargada puede escribirse como

$$E = T + V = \sum_{\lambda\mu} \left(\frac{1}{2} D_\lambda |\dot{\alpha}_{\lambda\mu}|^2 + \frac{1}{2} C_\lambda |\alpha_{\lambda\mu}|^2 \right). \tag{1}$$

   Muestre que

$$\begin{aligned} D_\lambda &= \frac{\rho_0 \ R_0^5}{\lambda} \\ C_\lambda &= (\lambda - 1) \left((\lambda + 2) R_0^2 \sigma - \frac{3e^2 Z^2}{2\pi(2\lambda + 1) R_0} \right) \end{aligned}$$

2. Cuántifique el LDM.
   (*Hint: escriba $L = T - V$, y derive el momento conjugado a $\alpha_{\lambda\mu}$, $\pi_{\lambda\mu} = \frac{\partial L}{\partial \alpha_{\lambda\mu}}$*)

$$H = \sum_{\lambda\mu} \left(\frac{1}{2D_\lambda} \pi_{\lambda\mu} \pi_{\lambda\ -\mu} (-1)^{\lambda-\mu} + \frac{1}{2} C_\lambda \alpha_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\ -\mu} (-1)^{\lambda-\mu} \right).$$

3. Re-escriba H en segunda cuantificación, especificando las relaciones de conmutacin entre los distintos operadores.

$$H = \sum_{\lambda\mu} \left(\hbar\omega_\lambda \beta^\dagger_{\lambda\mu} \beta_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \right).$$

$$\begin{aligned} \beta^\dagger_{\lambda\mu} &= \sqrt{\frac{D_\lambda \omega_\lambda}{2\hbar}} \alpha_{\lambda\mu} - \mathrm{i} \sqrt{\frac{1}{2D_\lambda \hbar\omega_\lambda}} \pi_{\lambda-\mu} (-1)^{\lambda-\mu}, \\ \beta_{\lambda\mu} &= \sqrt{\frac{D_\lambda \omega_\lambda}{2\hbar}} \alpha_{\lambda-\mu} (-1)^{\lambda-\mu} + \mathrm{i} \sqrt{\frac{1}{2D_\lambda \hbar\omega_\lambda}} \pi_{\lambda\mu}, \end{aligned}$$

4. Derive una expresión el operador cuadrupolar eléctrico en el LDM, y estime la probabilidad de transición del estado $0^+ \to 2_1^+$.

$$Q_{2\mu} = \frac{3Ze}{4\pi} R_0^2 \left(\alpha_{2\mu} - \frac{10}{\sqrt{70\pi}} [\alpha \times \alpha]^2 \right)$$

$$B(E2, 0^+ \to 2_1^+) = \frac{5\hbar}{2D_2\omega_2} (\rho_0 R_0^5)^2.$$

5. Suponga que el ^{116}Sn puede ser descripto con el LDM. Gráfique el espectro de energía y compare con los datos experimentales. Determine C_2 y D_2 a partir de los datos experimentales y compare con los resultados obtenidos a partir de LDM.

6. Un caso especial de movimiento colectivo de la superficie, es el de los núcleos deformados. En este caso el potencial tiene mínimos bien definidos en función de la deformación. Supongamos una deformación cuadrupolar, en el sistema de coordenadas fijo al cuerpo (de manera que $\alpha'_{ij} = 0$ para $i \neq j$), la energía potencial se la escribimos como

$$V(\zeta, \eta) = \frac{1}{2} C_0 \zeta^2 + C_2 \eta^2,$$

con $\zeta = \alpha'_{20} - \beta_0$ y $\eta = \alpha'_{22} = \alpha'_{2-2}$, y en terminos de los parámetros de deformación $\alpha'_{2\pm 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin(\gamma)$ y $\alpha'_{20} = \beta \cos(\gamma)$. El término de energía cinética, $T = \sum_\mu \frac{1}{2} D_2 |\dot{\alpha}_{2\mu}|^2$, para pequeñas oscilaciones, escrito en el sistema intrínseco es

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} D_2 (\dot{\zeta}^2 + 2\dot{\eta}^2) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \mathcal{I}_k {\omega'_k}^2, \\
\mathcal{I}_1 &= \frac{D_2}{2} (\sqrt{6}(\beta_0 + \zeta) + 2\eta)^2 \approx 3D_2\beta_0^2 \equiv \mathcal{I}, \\
\mathcal{I}_2 &= \frac{D_2}{2} (\sqrt{6}(\beta_0 + \zeta) - 2\eta)^2 \approx 3D_2\beta_0^2 \equiv \mathcal{I}, \\
\mathcal{I}_3 &= 8D_2\eta^2, \\
T &\approx \frac{1}{2} D_2 (\dot{\zeta}^2 + 2\dot{\eta}^2) + \frac{1}{2} \mathcal{I} ({\omega'_1}^2 + {\omega'_2}^2) + 4D_2\eta^2 {\omega'_3}^2,
\end{aligned}$$

donde $\omega'_k = \dot{\theta}'_k$ es la velocidad angular respecto del eje k del sistema intrínseco. Para cuántificar el Hamiltoniano, podemos usar el procedimiento de Podolsky. En coordenadas curvilíneas , un elemento de línea se escribe como

$$\mathrm{ds}^2 = \sum_{ij} g_{ij} \mathrm{dx_i dx_j},$$

siendo g_{ij} los elementos del tensor de la métrica. En este caso el Laplaciano es

$$\mathbf{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_i}} \left(\sqrt{g} g_{ij}^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_j}} \right).$$

De manera que el término cinético de la energía , $T = \frac{1}{2} D_2 \frac{\mathrm{ds}^2}{\mathrm{dt}^2}$ se escribe como $\hat{T} = \frac{\hbar^2}{2D_2} \mathbf{\Delta}$. En nuestro caso:

$$\mathrm{ds}^2 = \mathrm{d}\zeta^2 + 2\mathrm{d}\eta^2 + \sum_k \frac{\mathcal{I}_k}{D_2} \mathrm{d}{\theta'_k}^2,$$

es decir que

$$g_{\zeta\zeta} = 1, \; g_{\eta\eta} = 2, \; g_{\theta'\theta'} = \frac{\mathcal{I}_k}{D_2}, \quad \text{and,} \; g = 2D_2^{-3} \mathcal{I}^2 \mathcal{I}_3.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \hat{T} &= -\frac{\hbar^2}{2D_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \sum_k \frac{D_2}{\mathcal{I}_k} \frac{\partial^2}{\partial {\theta'_k}^2} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2D_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{{J'_1}^2 + {J'_2}^2}{2\mathcal{I}} + \frac{{J'_3}^2}{16 D_2 \eta^2}. \end{aligned}$$

El diferencial de volumen para este espacio curvilíneo es $\mathrm{dV} = 4|\eta| D_2^{-1} \mathcal{I} \mathrm{d}\zeta \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\theta_1 \mathrm{d}\theta_2 \mathrm{d}\theta_3$. El problema a resolver es pues:

$$H(\zeta, \eta, \theta) \Phi(\zeta, \eta, \theta) = E \Phi(\zeta, \eta, \theta),$$

con

$$\begin{aligned} H(\zeta, \eta, \theta) &= \hat{T} + V \\ & -\frac{\hbar^2}{2D_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{{J'_1}^2 + {J'_2}^2}{2\mathcal{I}} + \frac{{J'_3}^2}{16 D_2 \eta^2} + \frac{1}{2} C_0 \zeta^2 + C_2 \eta^2. \end{aligned}$$

Determine el espectro y las autofunciones.

Bibliografía sugerida:

1. Bhor-Mottelson II-Capitulo VI
2. Ring-Shuck (Capítulo I.)
3. Greiner (Capitulo 6)