

Seminario de Mecánica Cuántica / Teoría de la Información Cuántica

Práctica VII (Curso 2023)

Verificar las cuentas, en el caso de ser posible, con Mathematica, Jupyter notebook o algún software similar.

I. Hallar las energías y autoestados exactos del Hamiltoniano

$$H = \sum_i (bc_i^\dagger c_i - v(c_i^\dagger c_{i+1} + c_{i+1}^\dagger c_i))$$

en los casos fermiónico y bosónico, para $i = 1, \dots, n$ y $n + 1 \equiv 1$ (condición cíclica). Interpretar H (Sugerencia: aplicar la transformada de Fourier discreta).

II. Sistemas en interacción

1) Hallar el estado fundamental, su energía y su entrelazamiento para:

a) (dos qubits)

$$H = B(\sigma_z^A + \sigma_z^B) - J(\sigma_+^A \sigma_-^B + \sigma_-^A \sigma_+^B)$$

Considerar los casos i) $0 < J < B$ y ii) $0 < B < J$.

b) (dos osciladores cuánticos acoplados, a^\dagger, a operadores de creación y aniquilación bosónicos)

$$H = \hbar\omega(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) - \hbar\gamma(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1), \quad |\gamma| < \omega$$

2) a) Mostrar que el efecto de un divisor de haces (beam splitter), representado por el operador unitario $U = \exp[i\theta(a_1 a_2^\dagger + a_1^\dagger a_2)]$, sobre un estado coherente es

$$U|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle = |\alpha \cos \theta + i\beta \sin \theta\rangle \otimes |\beta \cos \theta + i\alpha \sin \theta\rangle$$

b) Hallar $U|10\rangle, U|01\rangle$, donde $|10\rangle = a_2^\dagger|00\rangle, |01\rangle = a_1^\dagger|00\rangle$.

3) Consideremos el Hamiltonian de Jaynes Cummings para un campo cuántico,

$$H = \omega_0 S_z + \omega(a^\dagger a + 1/2) + \frac{1}{2}g(S_+ a + S_- a^\dagger)$$

Para espín $1/2$ (o sea, un sistema equivalente a un átomo de 2 estados) mostrar que:

a) El sistema acopla sólo estados $|0, n\rangle$ con $|1, n - 1\rangle$, donde $0, 1$ representa el estado atómico y n el del campo, y que por lo tanto, las energías exactas para $n \geq 1$ son

$$E_n^\pm = \omega n \pm \frac{1}{2}\sqrt{\delta^2 + ng^2}$$

Hallar explícitamente los autoestados para $\delta = 0$ (caso resonante). Mostrar también que si $|\delta| \gg g\sqrt{n} \Rightarrow \delta E_\pm^n \approx \pm \frac{1}{2}ng^2/\delta$.

b) Si inicialmente el sistema se encuentra en un estado separable $|0, n\rangle$, mostrar que al tiempo t el sistema en el caso resonante se encontrará en el estado

$$|\phi(t)\rangle = e^{-i\omega n t} [\cos(\sqrt{ng}t/2)|0, n\rangle - i \sin(\sqrt{ng}t/2)|1, n - 1\rangle]$$

c) Indicar para que tiempos se obtendrá un estado entrelazado de Bell entre el átomo y campo.

4) Consideremos el Hamiltoniano fermiónico

$$H = \frac{1}{2}\varepsilon \sum_p (c_{p+}^\dagger c_{p+} - c_{p-}^\dagger c_{p-}) - \frac{1}{2}V \sum_{p \neq q} (c_{p+}^\dagger c_{q+}^\dagger c_{q-} c_{p-} + c_{p-}^\dagger c_{q-}^\dagger c_{q+} c_{p+}) - G \sum_{p \neq q} c_{p+}^\dagger c_{q-}^\dagger c_{q+} c_{p-}$$

donde $V > 0$, $G > 0$ y $p, q = 1 \dots, \Omega$.

- Plantear las ecuaciones de Hartree-Fock para el caso de $N = \Omega$ fermiones, hallando la solución de energía mínima para $G > 0$, $V > 0$.
- Identificar el umbral para ruptura de simetría (cual?) en la aproximación.
- Hallar también la energía mínima en esta aproximación, y las energías de partícula independiente.