

Seminario de Mecánica Cuántica / Teoría de la Información Cuántica

Práctica III (Curso 2024)

Verificar, en el caso de ser posible, las cuentas con Mathematica, Jupyter notebook o algún software similar.

I. Compuertas Lógicas Cuánticas (2ª parte)

1) Escribir explícitamente el operador de rotación de un qubit alrededor de un eje \mathbf{n} , $R_{\mathbf{n}}(\theta) = \exp[-i\theta\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}/2]$, y verificar que una transformación unitaria arbitraria de un qubit puede escribirse como $U = e^{i\alpha}R_{\vec{n}}(\theta)$.

2) Verificar que $X = iR_x(\pi)$, $Y = iR_y(\pi)$, $Z = iR_z(\pi)$, $H = iR_{\mathbf{n}}(\pi)$, con $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, y que por lo tanto $XZX = -Z$, $XYX = -Y$, $HXH = Z$, $HZH = X$.

3) Determinar los tiempos t y el Hamiltoniano de dos qubits tales que el operador evolución $U(t) = \exp[-iHt/\hbar]$ coincida con $R_{\mathbf{n}}(\theta) \otimes R_{\mathbf{m}}(\phi)$.

4) Determinar un Hamiltoniano de dos qubits H y un tiempo t tal que $U = \exp[-iHt/\hbar]$ sea el operador QCnot usual (U_X).

II. Estados de dos qubits y traspuesta parcial.

1) A partir de la forma general de un estado de dos qubits

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4} \left[I \otimes I + \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} (r_i^A \sigma_i \otimes I + r_i^B I \otimes \sigma_i) + J_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right]$$

donde σ_i , $i = x, y, z$, son las matrices de Pauli de cada qubit,

a) expresar r_i^A , r_i^B y J_{ij} en términos de valores medios de observables del sistema.

b) Indicar si es siempre posible encontrar ejes locales tales que la matriz de elementos J_{ij} es diagonal.

c) Hallar las matrices densidad reducidas $\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{AB}$, $\rho_B = \text{Tr}_A \rho_{AB}$.

d) Hallar la traspuesta parcial respecto de B en esta representación.

e) Expresar en la forma anterior el estado puro $\rho_{AB} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, para

i) $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ y ii) $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$.

2) Para $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$, considerar el estado

$$\rho_{AB} = x|\Psi\rangle\langle\Psi| + (1-x)I \otimes I/4$$

a) Indicar para qué valores de x es ρ_{AB} un estado físico.

b) Indicar para qué valores de x es ρ_{AB} un estado puro.

c) Indicar para qué valores de x se viola la desigualdad de Bell $|\text{Tr} \rho_{AB} O| \leq 2$, con O el observable CHSH descrito en clase.

d) Indicar para qué valores de x es ρ_{AB} entrelazado.

e) Evaluar la negatividad, concurrencia y entrelazamiento de formación de ρ_{AB} .