Seminario de Mecánica Cuántica / Teoría de la Información Cuántica

Práctica IV (Curso 2024)

Verificar, en el caso de ser posible, las cuentas con Mathematica, Jupyter notebook o algún software similar.

I. Transformada de Fourier (TF) Cuántica.

1) Considerar la TF discreta de un conjunto de N números $\{f_j \in \mathbb{C}, j = 0, \ldots, N-1\}$:

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i2\pi jk/N}, \quad k = 0, \ldots, N-1$$

a) Probar que $f_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i2\pi kj/N}$, $j = 0, \ldots, N-1$.
b) Mostrar que si se extiende el conjunto de posibles valores de k, entonces $F_{k+lN} = F_k$.
c) Probar que si $f_{j+r} = f_j \ \forall\ j$ (f_j periódica con período r), con r divisor de $N \Rightarrow F_k \neq 0$ sólo si k es un múltiplo de N/r ($k = mN/r$, $m = 0, \ldots, r-1$), y que en tal caso,
$F_k = \frac{\sqrt{N}}{r} \sum_{j=0}^{r-1} f_j e^{-i2\pi jm/r}$ si $k = mN/r$.

2) a) Mostrar que si $f_j = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i2\pi xj/N} \Rightarrow |F_k| = |\frac{\sin[\pi(x-k)]}{N \sin[\pi(x-k)/N]}|$. Interpretar.
b) Probar que en a), $|F_k|$ es máximo en el entero más próximo a x, y que $|F_k| \leq \frac{1}{2|x-k|}$ si $|x-k| < N/2$. c) Mostrar que si $x \to m$, con m entero entre 0 y $N-1 \Rightarrow F_k \to \delta_{km}$.

3) a) Si $\{|j\rangle,\ j = 0, \ldots, N-1\}$ es una base ortonormal de un espacio V, mostrar que los estados

$$|\tilde{k}\rangle = U|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{i2\pi kj/N} |j\rangle\,, \quad k = 0, \ldots, N-1$$

forman también una base ortonormal de V (es decir, U es una transformación unitaria).
b) Probar que si $|\Psi\rangle = \sum_j c_j |j\rangle \Rightarrow |\Psi\rangle = \sum_k C_k |\tilde{k}\rangle$, con $C_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{-i2\pi jk/N}$.
c) Probar que si X es el operador definido por $X|j\rangle = j|j\rangle$ y $P = UXU^\dagger$, $T = e^{-i2\pi P/N}$,
$\Rightarrow P|\tilde{k}\rangle = k|\tilde{k}\rangle$, $T|\tilde{k}\rangle = e^{-i2\pi k/N}|\tilde{k}\rangle$ y $T|j\rangle = |j+1\rangle$, con $|N\rangle \equiv |0\rangle$. Interpretar.

4) Mostrar que la TF cuántica para n qubits puede ser escrita como

$$|\tilde{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} e^{2\pi ijk/2^n} |j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \otimes_{l=1}^{n} [|0_l\rangle + e^{2\pi ik/2^l} |1_l\rangle]$$

si $j = \sum_{l=1}^{n} j_l 2^{n-l}$. Escribirla explícitamente para uno y dos qubits ($n = 1, 2$) y dibujar los circuitos cuánticos correspondientes.

5) Reconocer que los algoritmos cuánticos basados en la TF se basan en el esquema

$$|0\rangle|0\rangle \to \alpha\sum_{j=0}^{2^n-1} |j\rangle|0\rangle \to \alpha\sum_{j=0}^{2^n-1} |j\rangle|f(j)\rangle = \alpha^2\sum_{k=0}^{2^n-1} |\tilde{k}\rangle \sum_{j=0}^{2^n-1} e^{-i2\pi kj/2^n} |f(j)\rangle \to \alpha^2\sum_{k=0}^{2^n-1} |k\rangle \sum_{j=0}^{2^n-1} e^{-i2\pi kj/2^n} |f(j)\rangle$$

identificando α y los pasos señalados por $\to$.
b) En el caso de estimación de fase, $|f(j)\rangle = e^{i2\pi xj/N}|\Phi\rangle$, con $0 \leq x < N = 2^n$. Comprobar que si $x = m$, con m natural entre 0 y $N-1$, el estado final será $|m\rangle|\Phi\rangle$. Discutir también el estado final si x no es entero.
c) En el caso de determinación del período r, $f(j) = f(j+r) \ \forall\ j$, verificar que si $N = 2^n$ es múltiplo de r, sólo aparecerán en el estado final los estados con k múltiplo de N/r.

6) Usar la TF discreta para encontrar los autovalores y autovectores de una matriz A de $N \times N$ con elementos $A_{ij} = f(j-i)$, con $f(j+N) = f(j) \ \forall\ j$.

II. Algoritmo de Búsqueda de Grover

1) Considerar el estado buscado $|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum\limits_{f(j)=1} |j\rangle$, ($M$ denota el número de estados $|j\rangle$ tales que $f(j) = 1$), el estado ortogonal $|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-M}} \sum\limits_{f(j)=0} |j\rangle$ y el estado inicial ($N = 2^n$)

$$|\Phi\rangle = H^{\otimes n}|0\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{N}} \textstyle\sum_j |j\rangle = \sqrt{\tfrac{M}{N}}|B\rangle + \sqrt{\tfrac{N-M}{N}}|A\rangle$$

Probar que si $O|j\rangle = (-1)^{f(j)}|j\rangle$, la iteración de Grover $G = (2|\Phi\rangle\langle\Phi| - I)\,O$ equivale a una rotación en sentido antihorario de ángulo 2θ, con $\sin\theta = \sqrt{\frac{M}{N}}$, en el subespacio generado por los estados $|A\rangle$ y $|B\rangle$.

2) Si $H = \hbar\omega(|B\rangle\langle B| + |\Phi\rangle\langle\Phi|)$, mostrar que existe un tiempo t independiente de $|B\rangle$ tal que $\exp[-iHt/\hbar]|\Phi\rangle = |B\rangle$. El problema de búsqueda puede pues reducirse al problema de la simulación del Hamiltoniano H.