

Seminario de Mecánica Cuántica / Teoría de la Información Cuántica

Práctica V (Curso 2024)

Verificar las cuentas, en los casos en que sea posible, con *mathematica*, *Jupyter notebook*, o algún software similar.

I. Evolución de sistemas cuánticos abiertos

1) Dado un estado inicial producto $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ de un sistema bipartito, y un operador evolución $U_{AB} = \exp[-iH_{AB}t]$, derivar la expresión

$$\rho'_A = \text{Tr}_B [U_{AB} \rho_{AB} U_{AB}^\dagger] = \sum_{\alpha} E_{\alpha} \rho_A E_{\alpha}^\dagger$$

dando la forma explícita de E_{α} . Probar también que $\sum_{\alpha} E_{\alpha}^\dagger E_{\alpha} = I_A$.

2) a) Mostrar que para el caso de la evolución por un operador control not $U_{AB} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$ de un estado producto de dos qubits $\rho_{AB} = \rho_A \otimes |\psi_B\rangle\langle\psi_B|$, se obtiene

$$\rho'_A = (1-p)\rho_A + pZ\rho_A Z$$

Dar el valor explícito de p e identificar los operadores E_0 y E_1 .

Interpretar el resultado como disminución de elementos no diagonales en una determinada base e indicar para cuales estados iniciales $|\psi_B\rangle$ se obtiene i) $p = 1/2$ (decoherencia completa) ii) $p = 0$ (ausencia de decoherencia). Discutir la variación de la entropía de ρ_A .

b) Hallar la evolución de ρ_A para el mismo operador U_{AB} y un estado inicial producto general $\rho_A \otimes \rho_B$. Indicar que sucede si $\rho_B = I_B/d_B$.

3) Considerar los operadores $E_1 = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-p}|1\rangle\langle 1|$, $E_2 = \sqrt{p}|0\rangle\langle 1|$, con $p \in [0, 1]$.

a) Mostrar que satisfacen en general $\sum_{i=1,2} E_i^\dagger E_i = I$, pero $\sum_{i=1,2} E_i E_i^\dagger \neq I$ si $p \neq 0$.

b) Dar una expresión de $\rho'_A = \sum_{i=1,2} E_i \rho_A E_i^\dagger$ para un operador densidad ρ_A general de un qubit. Interpretar y discutir la variación de la entropía de ρ_A .

4) Considerando un átomo de 2 niveles con estados $|0\rangle$, $|1\rangle$ con energías 0 y ε , y los estados de campo $|0\rangle$ y $|1\rangle = a_w^\dagger |0\rangle$, con $\hbar\omega = \varepsilon$, mostrar que si

$$U_{AC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en la base producto estándar, entonces

$$\rho'_A = \text{Tr}_C [U_{AC} \rho_A \otimes |0\rangle\langle 0| U_{AC}^\dagger] = E_0 \rho_A E_0^\dagger + E_1 \rho_A E_1^\dagger$$

con

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sin \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar también ρ'_A para $\rho_A = p_0|0\rangle\langle 0| + p_1|1\rangle\langle 1|$.

Determinar también un H_{AC} y un tiempo t tal que $\exp[-iH_{AC}t] = U_{AC}$.