# Seminario de Mecánica Cuántica / Teoría de la Información Cuántica

## Práctica V (Curso 2022)

**I. Evolución de sistemas cuánticos abiertos**

1) Dado un estado inicial producto $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ de un sistema bipartito, y un operador evolución $U_{AB} = \exp[-iH_{AB}t]$, derivar la expresión

$$\rho'_A = \mathrm{Tr}_B\,[U_{AB}\rho_{AB}U^\dagger_{AB}] = \sum_\alpha E_\alpha\,\rho_A E^\dagger_\alpha$$

dando la forma explícita de de $E_\alpha$. Probar también que $\sum_\alpha E^\dagger_\alpha E_\alpha = I_A$.

2) a) Mostrar que para el caso de la evolución por un operador control not $U_{AB} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X$ de un estado producto de dos qubits $\rho_{AB} = \rho_A \otimes |\psi_B\rangle\langle\psi_B|$, se obtiene

$$\rho'_A = (1-p)\rho_A + pZ\rho_A Z$$

Dar el valor explícito de $p$ e identificar los operadores $E_0$ y $E_1$.
Interpretar el resultado como disminución de elementos no diagonales en una determinada base e indicar para cuales estados iniciales $|\psi_B\rangle$ se obtiene i) $p = 1/2$ (decoherencia completa) ii) $p = 0$ (ausencia de decoherencia). Discutir la variación de la entropía de $\rho_A$.
b) Hallar la evolución de $\rho_A$ para el mismo operador $U_{AB}$ y un estado inicial producto general $\rho_A \otimes \rho_B$. Indicar que sucede si $\rho_B = I_B/d_B$.

3) Considerar los operadores $E_1 = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-p}|1\rangle\langle 1|$, $E_2 = \sqrt{p}|0\rangle\langle 1|$, con $p \in [0,1]$.
a) Mostrar que satisfacen en general $\sum_{i=1,2} E^\dagger_i E_i = I$, pero $\sum_{i=1,2} E_i E^\dagger_i \neq I$ si $p \neq 0$.
b) Dar una expresión de $\rho'_A = \sum_{i=1,2} E_i \rho_A E^\dagger_i$ para un operador densidad $\rho_A$ general de un qubit. Interpretar y discutir la variación de la entropía de $\rho_A$.

4) Considerando un átomo de 2 niveles con estados $|0\rangle$, $|1\rangle$ con energías 0 y $\varepsilon$, y los estados de campo $|0\rangle$ y $|1\rangle = a^\dagger_w|0\rangle$, con $\hbar\omega = \varepsilon$, mostrar que si

$$U_{AC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en la base producto estándar, entonces

$$\rho'_A = \mathrm{Tr}_C\,[U_{AC}\,\rho_A \otimes |0\rangle\langle 0|\,U^\dagger_{AC}] = E_0\rho_A E^\dagger_0 + E_1\rho_A E^\dagger_1$$

con

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar también $\rho'_A$ para $\rho_A = p_0|0\rangle\langle 0| + p_1|1\rangle\langle 1|$.

Determinar también un $H_{AC}$ y un tiempo $t$ tal que $\exp[-iH_{AC}t] = U_{AC}$.