Seminario de Partículas y Campos – Curso 2024

Práctica 1: Campo Escalar

1. Sea el hamiltoniano del oscilador armónico unidimensional,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2,$$

donde p y q satisfacen la relación de conmutación $[q, p] = i\hbar$.

(a) A partir de las definiciones

$$a = \frac{1}{(2\hbar m\omega)^{1/2}}(m\omega q + ip),\ \ a^\dagger = \frac{1}{(2\hbar m\omega)^{1/2}}(m\omega q - ip)$$

reescriba el hamiltoniano en términos del operador $N \equiv a^\dagger a$ y determine el conmutador $[a, a^\dagger]$.

(b) Demuestre que N posee autovalores positivos.

(c) Demuestre que si $|\alpha\rangle$ es un autoestado de N con autovalor α, entonces $a|\alpha\rangle$ y $a^\dagger|\alpha\rangle$ son autoestados de N con autovalores $\alpha - 1$ y $\alpha + 1$, respectivamente.

(d) A partir del resultado del inciso anterior muestre que el autovalor más bajo de N es 0 y que el espectro de autovalores es $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(e) Demuestre que si $\langle n|n\rangle = 1$, entonces los estados $|n \pm 1\rangle$ también quedan normalizados a la unidad si se definen según las expresiones

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle,\ \ a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle.$$

(f) Suponiendo que $\langle 0|0\rangle = 1$, muestre que los autoestados normalizados de N vienen dados por

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle, \qquad n = 0, 1, 2, ..$$

(g) Considere ahora un conjunto de operadores $a_r, a_r^\dagger$, $r = 1, 2, ..$ que satisfacen las reglas de conmutación $[a_r, a_s^\dagger] = \delta_{rs}$ y $[a_r, a_s] = [a_r^\dagger, a_s^\dagger] = 0$. ¿Qué tipo de simetría tienen los estados generados por tales operadores frente al intercambio de partículas? En base a esto, ¿qué tipo de partículas describen?.

2. A partir del desarrollo del campo escalar real en términos de soluciones de la ecuación de Klein-Gordon derive la siguiente expresión para el operador de aniquilación $a(\mathbf{k})$

$$a(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\hbar c^2 V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}}\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\, e^{ikx}\left(i\dot{\phi}(x) + \omega_{\mathbf{k}}\phi(x)\right)$$

y obtenga las relaciones de conmutación entre los operadores de creación y aniquilación a partir de las relaciones de conmutación para los campos.

3. Sean los campos escalares complejos $\phi(x)$ y $\phi^\dagger(x)$.

(a) A partir de la densidad Lagrangiana

$$\mathscr{L} = \partial_\alpha\phi^\dagger\,\partial^\alpha\phi - \mu^2\,\phi^\dagger\phi,$$

donde $\mu \equiv m\,c/\hbar$, obtenga las ecuaciones de movimiento de los campos, los impulsos canónicamente conjugados y la densidad Hamiltoniana.

(b) A partir de las expresiones de ϕ y $\phi^\dagger$ en función de operadores de creación y aniquilación exprese el hamiltoniano en términos de operadores número de ocupación.

4. Considere nuevamente el campo escalar complejo y construya la corriente

$$j^\alpha = -\frac{iq}{\hbar}\,\mathrm{N}[\,(\partial^\alpha \phi^\dagger)\phi - (\partial^\alpha \phi)\phi^\dagger\,].$$

(a) Demuestre que $\partial_\alpha j^\alpha = 0$.

(b) Utilizando el teorema de Gauss muestre que la carga

$$Q = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\frac{j^0}{c}$$

es una cantidad conservada.

(c) Exprese el operador Q en términos de operadores de creación y aniquilación.

(d) Calcule los conmutadores $[Q, a^\dagger(\mathbf{k})]$ y $[Q, b^\dagger(\mathbf{k})]$ y utilice lo obtenido para determinar las cargas de las partículas creadas por los respectivos operadores.

5. (a) Muestre que el conmutador entre campos reales de Klein-Gordon $[\phi(x), \phi(y)]$ para dos puntos arbitrarios x e y del espacio-tiempo resulta igual a $i\hbar c\Delta(x-y)$ con

$$\Delta(x) = -\frac{c}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{\omega_\mathbf{k}}\sin(kx)$$

(b) Demuestre que la función $\Delta(x)$ puede reescribirse como

$$\Delta(x) = -\frac{c}{(2\pi)^3}\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{\omega_\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\sin(\omega_\mathbf{k} t),$$

donde $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$. A partir de esta expresión recupere el resultado $[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = 0$.

(c) Muestre que $\Delta(x)$ satisface la ecuación de Klein-Gordon.

(d) Demuestre que la función $\Delta(x)$ es invariante ante transformaciones del grupo propio de Lorentz. Utilice este resultado junto a lo realizado en el inciso (b) para demostrar que $[\phi(x), \phi(y)]$ se anula para intervalos tipo espacio ($(x-y)^2 < 0$). Discuta las implicancias de este resultado.

6. Muestre que la función Δ_F de Feynman satisface la ecuación inhomogénea de Klein-Gordon:

$$(\Box + \mu^2)\Delta_\mathrm{F}(x) = -\delta^{(4)}(x)$$

7. Demuestre que el propagador de un escalar cargado viene dado por

$$\langle 0|\mathrm{T}\{\phi(x)\phi^\dagger(x')\}|0\rangle = i\hbar c\,\Delta_\mathrm{F}(x-x')$$

e interprételo en términos de la emisión y reabsorción de partículas y antipartículas.