Seminario de Partículas y Campos – Curso 2024

Práctica 2: Campo de Dirac

1. (a) Muestre que para operadores a_r y $a_r^\dagger$ anticonmutantes, el operador $N_r = a_r^\dagger a_r$ satisface las siguientes reglas de conmutación:

$$[N_r, a_s] = -\delta_{rs} a_s, \qquad [N_r, a_s^\dagger] = \delta_{rs} a_s^\dagger,$$

las cuales permiten interpretar a a_r, $a_r^\dagger$ y N_r como operadores de aniquilación, creación y número, respectivamente.

(b) Calcule los autovalores del operador N_r y compare con lo obtenido en el ejercicio 1 de la práctica 1. ¿Qué tipo de partículas describen los operadores anticonmutantes? Muestre explícitamente que los estados creados por los operadores $a_r^\dagger$ tienen la simetría adecuada frente al intercambio de partículas y satisfacen el principio de exclusión de Pauli.

2. (a) Demuestre que el Lagrangiano de Dirac

$$\mathscr{L} = c\bar{\psi}(x)\,(i\hbar\,\partial\!\!\!/ - mc)\,\psi(x)$$

es invariante bajo la transformación de fase

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x)$$

siendo α un parámetro real arbitrario.

(b) Aplicando el Teorema de Noether, pruebe que la corriente conservada asociada a dicha transformación se expresa como

$$J^\mu(x) = -\alpha\,\hbar\,c\,\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$$

(En particular, note que la invariancia ante la anterior transformación global de fase implica la conservación de la corriente electromagnética $J^\mu = (c\rho, \mathbf{J}) = cq\,\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$, con q la carga eléctrica, lo que implica a su vez la conservación de la carga eléctrica).

3. Se define la transformación de fase quiral para un campo de Dirac como:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha\gamma^5}\psi(x)$$

siendo α un parámetro real arbitrario.

(a) Deduzca las correspondientes transformaciones de $\psi^\dagger(x)$ y $\bar{\psi}(x)$

(b) Encuentre la transformación infinitesimal del Lagrangiano de Dirac para una transformación de fase quiral arbitraria. Demuestre que dicho Lagrangiano es invariante solamente en el caso de que el campo fermiónico sea no-masivo.

(c) En el caso de campo no-masivo, demuestre que la corriente de Noether asociada se expresa como

$$J^\mu_{\mathrm{A}}(x) = -\alpha\,\hbar\,c\,\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$$

(Más generalmente, la corriente $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$ es conocida como corriente axial).

4. (a) Demuestre que las cantidades $P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)$ y $P_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)$ operan como proyectores sobre el espacio de Dirac. Pruebe que cumplen $P_{L(R)}\gamma^\mu = \gamma^\mu P_{R(L)}$.

   (b) Se definen los campos $\psi_L(x) = P_L\psi(x)$ y $\psi_R(x) = P_R\psi(x)$. Encuentre las ecuaciones de movimiento para dichos campos partiendo del Lagrangiano de Dirac del campo ψ. ¿Qué ocurre en el caso de $m = 0$?

   (c) A partir de las ecuaciones del inciso anterior para el caso no-masivo, demuestre la siguiente igualdad

$$\gamma^5 w_r(\mathbf{p}) = \sigma_{\mathbf{p}} w_r(\mathbf{p}),$$

   donde $w_r(\mathbf{p})$ denota cualquiera de los espinores $u_r(\mathbf{p})$ o $v_r(\mathbf{p})$ $(r = 1, 2)$ autoestados de la helicidad $\sigma_{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$, con $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12})$.

   (d) Utilice la igualdad demostrada en el inciso anterior y los proyectores P_L y P_R para identificar los cuatro espinores $u_r(\mathbf{p})$, $v_r(\mathbf{p})$ $(r = 1, 2)$ con los espinores $u_{L,R}(\mathbf{p})$ y $v_{L,R}(\mathbf{p})$. A partir de ello y teniendo en cuenta lo visto en la teoría respecto a la aplicación del operador de helicidad sobre estados de una partícula y de una antipartícula indique qué tipo de partículas describen los campos ψ_L y ψ_R.

5. (a) Muestre que los operadores

$$\Lambda^\pm = \frac{\pm \not{p} + mc}{2mc},$$

   funcionan como operadores de proyección sobre las soluciones de energía positiva y negativa de la ecuación de Dirac.

   (b) Utilizando la relación de completitud:

$$\sum_{r=1}^{2} \left[u_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p}) - v_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{v}_{r\beta}(\mathbf{p})\right] = \delta_{\alpha\beta},$$

   demuestre las relaciones

$$\Lambda^+_{\alpha\beta} = \sum_{r=1}^{2} u_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{u}_{r\beta}(\mathbf{p})$$

$$\Lambda^-_{\alpha\beta} = -\sum_{r=1}^{2} v_{r\alpha}(\mathbf{p})\bar{v}_{r\beta}(\mathbf{p})$$

   (Estas reglas de suma le serán útiles en el siguiente ejercicio y serán utilizadas asiduamente en el cálculo de secciones eficaces no polarizadas.)

6. (a) A partir del desarrollo de los campos en términos de operadores de creación y aniquilación calcule el anticonmutador:

$$[\psi(x), \bar{\psi}(y)]_+ = iS(x-y),$$

   donde

$$S(x) = \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{mc}{\hbar}\right)\Delta(x),$$

   y $\Delta(x)$ es la función vista en la práctica 1 en el contexto de campos escalares.

   (b) Utilice el resultado del inciso anterior para obtener la relación de anticonmutación a tiempos iguales:

$$[\psi(\mathbf{x}, t), \bar{\psi}(\mathbf{y}, t)]_+ = \gamma^0\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

(c) Muestre que la relación anterior es equivalente a la relación de anticonmutación a tiempos iguales de los campos canónicos:

$$[\psi_\alpha(\mathbf{x},t), \pi_\beta(\mathbf{y},t)]_+ = i\hbar\, \delta_{\alpha\beta}\, \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

7. (a) Recordando cómo transforman las matrices y los campos de Dirac, demuestre que la corriente $J^\mu(x)$ del ejercicio 2 transforma como un vector frente a transformaciones de Lorentz. ¿Cómo transforma el conmutador de las corrientes?

   (b) A partir de las reglas de anticonmutación a tiempos iguales entre los campos fermiónicos y sus conjugados, encuentre el conmutador de las corrientes en términos de ψ y $\bar{\psi}$.

   (c) Finalmente, demuestre que se satisface la siguiente relación de conmutación para las corrientes:

$$[J^\mu(x), J^\mu(y)] = 0 \quad \text{si } (x-y)^2 < 0$$

8. Teniendo en cuenta la relación entre las funciones $S(x)$ y $S_{\mathrm{F}}(x)$ con las correspondientes del campo escalar ($\Delta(x)$ y $\Delta_{\mathrm{F}}(x)$, respectivamente), demuestre que las mismas satisfacen las ecuaciones de Dirac homogéneas e inhomogéneas:

$$(i\hbar\,\partial\!\!\!/ - mc)S(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad (i\hbar\,\partial\!\!\!/ - mc)S_{\mathrm{F}}(x) = \hbar\,\delta(x)$$