Seminario de Partículas y Campos – Curso 2024

Práctica 4: Matriz S

1. (a) A partir de la relación entre las representaciones de Heisenberg y de Interacción y la representación de Schrödinger, deduzca las relaciones entre operadores y estados en las representaciones de Heisenberg y de Interacción en términos del operador unitario:

$$U(t) = e^{iH_0^S(t-t_0)} e^{-iH^S(t-t_0)},$$

donde H_0^S y H^S hacen referencia al hamiltoniano libre y total en la representación de Schrödinger, respectivamente.
(b) Encuentre cómo es la evolución temporal de los operadores y estados en la representación de Interacción. Dicho de otro modo, deduzca las ecuaciones de movimiento:

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{O}^I(t) = [\mathcal{O}^I(t), H_0] \qquad \text{y} \qquad i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A,t\rangle_I = H^I_{int}(t)|A,t\rangle_I$$

siendo H_0 el Hamiltoniano libre (que es el mismo en las representaciones de Schrödinger y de Interacción) y $H_I^{I(S)}(t)$ el Hamiltoniano de interacción en la representación de Interacción (Schrödinger) dado por

$$H_I^I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} H_I^S(t) e^{-iH_0(t-t_0)}$$

2. Suponga que el operador O es una constante de movimiento en la representación de Heisenberg para campos libres. Suponga ahora que se tienen campos interactuantes de manera que el hamiltoniano puede separarse como $H_0 + H_I$, con H_0 el hamiltoniano que describe los campos libres y H_I el hamiltoniano que describe su interacción.
(a) Demuestre que $[O^I, H_0^I] = 0$. ¿Puede decirse entonces que O representa una constante de movimiento para campos interactuantes?.
(b) Indique qué condición debe satisfacer el operador O para constituir una constante de movimiento y muestre que lo es para cualquiera de las tres representaciones.

3. (a) La matriz S es unitaria. Partiendo de la definición en términos del Hamiltoniano, demuestre que la matriz S a segundo orden en teoría de perturbaciones verifica explícitamente esta condición.

   (b) Verifique que dicha condición está relacionada con la conservación de la probabilidad, es decir, que las interacciones mantienen el espectro en el sentido de que los estados iniciales y finales posibles desarrollan un mismo espacio de Hilbert. ¿Qué característica del Hamiltoniano asegura esta conservación?

4. Pruebe la equivalencia entre las series de Dyson escritas sin y con orden temporal. Explícitamente:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_1 \int_{-\infty}^{t_1}\mathrm{d}t_2 \ldots \int_{-\infty}^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_n\, H_{int}(t_1)H_{int}(t_2)\ldots H_{int}(t_n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_1 \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_2 \ldots \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_n\, T\{H_{int}(t_1)H_{int}(t_2)\ldots H_{int}(t_n)\}$$

¿Qué ventaja tiene la expresión con el orden temporal explícito?

5. (a) Para la demostración del Teorema de Wick es útil descomponer un campo A en sus partes lineales en operadores de creación y aniquilación, sean $A^{\pm}$. ¿Cómo actuan estos operadores A^{+} y A^{-} sobre el vacío?

   (b) Demuestre que

$$AB - N\{AB\} = [A^{+}, B^{-}]_{\mp}$$

   donde $[\cdot, \cdot]_{-}$ es el conmutador para campos bosónicos y $[\cdot, \cdot]_{+}$ es el anticonmutador para campos fermiónicos.

   (c) A partir de lo anterior muestre que

$$T\{A(x)B(y)\} = N\{A(x)B(y)\} + \langle 0|T\{A(x)B(y)\}|0\rangle$$

   tanto para campos bosónicos como fermiónicos.