

# ANÁLISIS DE SEÑALES CURSO 2021

---

ANÁLISIS DE FOURIER  
PROF. JORGE RUNCO

1

## ANÁLISIS DE FOURIER EN TC

---

- Serie de Fourier
- Transformada de Fourier
- Fórmulas de análisis y síntesis
- Respuesta en  $f$  de sistemas LTI

2

## INTRODUCCIÓN

- En la clase anterior caracterizamos a los sistemas y encontramos las respuestas de los mismos en el dominio del tiempo, resolviendo ecuaciones diferenciales y/o haciendo la convolución de la señal de entrada y la respuesta al impulso.
- La Serie y la Transformada de Fourier son métodos alternativos para el análisis de señales y sistemas en el dominio de la frecuencia.
- Transforman una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, en una expresión algebraica, permitiendo entre otras cosas, simplificar la determinación de la respuesta permanente de ese sistema, así como su respuesta en frecuencia.

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

3

## DOMINIO DE FRECUENCIA

### ➤ Metodología

- Señales elementales a partir de las cuales se puede construir por combinación lineal cualquier señal.
- Construir la respuesta al sistema a partir de su respuesta a la señal elemental.

### ➤ Se introducen los siguientes conceptos :

- Exponenciales complejas como señal básica.
- Dualidad entre dominios de tiempo y frecuencia.
- Respuesta en frecuencia de sistemas LTI

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

4

- Antes pensábamos  $\Rightarrow$  impulsos
- Ahora pensamos  $\Rightarrow$  funciones propias de los sistemas LIT



Entrada : función propia  $\Rightarrow$  Salida : misma función multiplicada por una constante

A partir de la propiedad de superposición de los sistemas LIT

$$x(t) = \sum a_k \phi_k(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \sum k a_k \phi_k(t)$$

5

## ¿CÓMO CALCULAMOS K?

---



Recordando la definición de convolución:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] e^{st} =$$

$$= H(s) e^{st}$$

Fourier : con  $s = j\omega$

Función propia

Valor propio

Prof. Jor Curso 2021

6

- Las exponenciales complejas son funciones propias de los sistemas (LIT), ya que cumplen con la característica de que al aplicarlas a un sistema, la respuesta permanente es la misma entrada (tiene la misma forma) multiplicada por una constante compleja.
- Las exponenciales complejas son periódicas, la constante compleja es la función de transferencia o función del sistema  $H(s)|_{s=j\omega_0}$  evaluada a la frecuencia  $j\omega_0$  de la señal de entrada.
- A esta constante se le denomina valor propio del sistema. Esto es, la respuesta permanente a una entrada exponencial compleja es

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \rightarrow y(t) = H(s)|_{s=j\omega_0} e^{j\omega_0 t}$$

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

7

- Como ejemplos para entender

$$x(t) = e^{j\omega_1 t} \rightarrow y(t) = H(s)|_{s=j\omega_1} e^{j\omega_1 t}$$

$$x(t) = 5e^{j\omega_2 t} \rightarrow y(t) = H(s)|_{s=j\omega_2} 5 e^{j\omega_2 t}$$

$$x(t) = 2e^{j(\omega_2 t + \pi/4)} \rightarrow y(t) = H(s)|_{s=j\omega_2} 2 e^{j(\omega_2 t + \pi/4)}$$

$$x(t) = 5e^{j\omega_1 t} + 2e^{j\omega_2 t} \rightarrow$$

$$y(t) = H(s)|_{s=j\omega_1} 5e^{j\omega_1 t} + H(s)|_{s=j\omega_2} 2e^{j\omega_2 t}$$

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

8

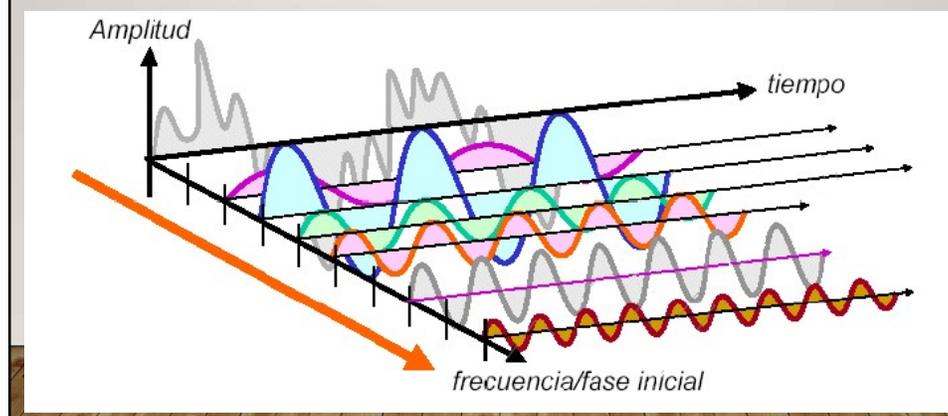
- Ya que las exponenciales complejas son funciones propias de los sistemas (LIT), una señal de entrada se puede definir como la superposición de un número infinito de exponenciales complejas, que pueden o no estar ponderadas y desplazadas. De manera general, la serie exponencial de  $x(t)$  es:
- $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \dots + c_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + c_{-1} e^{-j\omega_0 t} + c_0 + c_1 e^{j\omega_0 t} + c_2 e^{j2\omega_0 t} + \dots$
- Donde los  $c_k$  pueden ser complejos.
- La salida ó respuesta permanente es:

Prof. Jorge Runco  $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k H(kj\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$  Curso 2021

9

## Representación de señales

Uno de los métodos de representar la señal  $x(t)$  es bajo la forma de componentes de  $\neq f$ ,  $c/u$  de ellas con una amplitud y fase inicial



10

## SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

Algunas funciones periódicas  $f(t)$  de periodo  $T$  pueden expresarse por la siguiente serie, llamada *Serie Trigonométrica de Fourier*

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \dots + b_1 \sin(\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots$$

Donde  $\omega_0 = 2\pi/T$ .

Es decir,

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

11

## SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

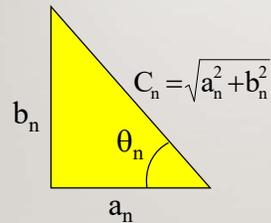
Es posible escribir de una manera ligeramente diferente la Serie de Fourier, si observamos que el término  $a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$  se puede escribir como

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left( \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(n\omega_0 t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(n\omega_0 t) \right)$$

Podemos encontrar una manera más compacta para expresar estos coeficientes pensando en un triángulo rectángulo:

12

## SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER



$$\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \cos \theta_n$$

$$\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \text{sen} \theta_n$$

Con lo cual la expresión queda

$$\begin{aligned} C_n [\cos \theta_n \cos(n\omega_0 t) + \text{sen} \theta_n \text{sen}(n\omega_0 t)] \\ = C_n [\cos(n\omega_0 t - \theta_n)] \end{aligned}$$

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

13

## SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

Si además definimos  $C_0 = a_0/2$ , la serie de Fourier se puede escribir como:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n [\cos(n\omega_0 t - \theta_n)]$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = \tan^{-1} \left( \frac{b_n}{a_n} \right)$$

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

14

## SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

- Así, una función periódica  $f(t)$  se puede escribir como la suma de componentes sinusoidales de diferentes frecuencias  $\omega_n = n\omega_0$ .
- A la componente sinusoidal de frecuencia  $n\omega_0$ :  $C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$  se le llama la  $n$ -ésima armónica de  $f(t)$ .
- A la primera armónica ( $n=1$ ) se le llama la componente fundamental y su periodo es el mismo que el de  $f(t)$
- A la frecuencia  $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T$  se le llama frecuencia angular fundamental.

15

## PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES SENOY COSENO: FUNCIONES ORTOGONALES

- Un conjunto de funciones  $\phi_k(t)$  es ortogonal en un intervalo  $a < t < b$  si para dos funciones cualesquiera se cumple

$$\int_a^b \phi_m(t) \phi_n(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ r_n & \text{para } m = n \end{cases}$$

16

## SENOS Y COSENOS: ORTOGONALIDAD

El siguiente es un conjunto de funciones ortogonales en el intervalo  $-T/2 < t < T/2$ .

$1, \cos w_0 t, \cos 2w_0 t, \cos 3w_0 t, \dots, \sin w_0 t, \sin 2w_0 t, \sin 3w_0 t, \dots$

(para cualquier valor de  $\omega_0 = 2\pi/T$ ).

Para verificar lo anterior podemos probar:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) dt = \frac{\sin(m\omega_0 t)}{m\omega_0} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{2\sin(m\omega_0 T/2)}{m\omega_0} = \frac{2\sin(m\pi)}{m\omega_0} = 0$$

Ya que  $m$  es un entero.

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

17

## SENOS Y COSENOS: ORTOGONALIDAD

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) dt &= \frac{-\cos(m\omega_0 t)}{m\omega_0} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \\ &= \frac{-1}{m\omega_0} [\cos(m\omega_0 T/2) - \cos(m\omega_0 T/2)] = 0 \end{aligned}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ T/2 & \text{para } m = n \neq 0 \end{cases}$$

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

18

## SENOS Y COSENOS: ORTOGONALIDAD

---

$$\int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(m\omega_0 t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ T/2 & \text{para } m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{para cualquier } m, n$$

19

## CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE LA SERIE DE FOURIER

---

➤ Dada una función periódica  $f(t)$  ¿cómo se obtiene su serie de Fourier?

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)]$$

➤ Obviamente, el problema se resuelve si sabemos como calcular los coeficientes  $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$

➤ Esto se puede resolver considerando la ortogonalidad de las funciones seno y coseno comentada anteriormente.

20

Multiplicando ambos miembros por  $\cos(n\omega_0 t)$  e integrando de  $-T/2$  a  $T/2$ , obtenemos:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Similarmente, multiplicando por  $\sin(n\omega_0 t)$  e integrando de  $-T/2$  a  $T/2$ , obtenemos:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Similarmente, integrando de  $-T/2$  a  $T/2$ , obtenemos:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

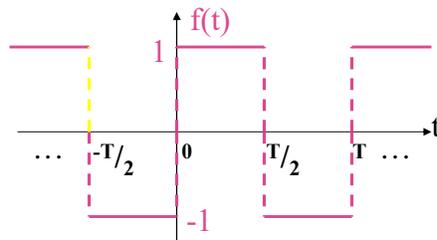
✓ El intervalo de integración no necesita ser simétrico respecto al origen.

✓ Como la ortogonalidad de las funciones seno y coseno no sólo se da en el intervalo de  $-T/2$  a  $T/2$ , sino en cualquier intervalo que cubra un periodo completo:

(de  $t_0$  a  $t_0+T$ , con  $t_0$  arbitrario)

✓ las fórmulas anteriores pueden calcularse en cualquier intervalo que cumpla este requisito

Ejemplo: Encontrar la Serie de Fourier para la siguiente función de periodo T:



$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{para } -\frac{T}{2} < t < 0 \\ 1 & \text{para } 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Solución: La expresión para  $f(t)$  en  $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$  es

23

Coefficientes  $a_n$ :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$= \frac{2}{T} \left[ \int_{-T/2}^0 -\cos(n\omega_0 t) dt + \int_0^{T/2} \cos(n\omega_0 t) dt \right]$$

$$= \frac{2}{T} \left[ -\frac{1}{n\omega_0} \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \Big|_{-T/2}^0 + \frac{1}{n\omega_0} \operatorname{sen}(n\omega_0 t) \Big|_0^{T/2} \right]$$

$$= 0 \quad \text{para } n \neq 0$$

24

Coefficientes  $b_n$ :

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \\
 &= \frac{2}{T} \left[ \int_{-T/2}^0 -\operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt + \int_0^{T/2} \operatorname{sen}(n\omega_0 t) dt \right] \\
 &= \frac{2}{T} \left[ \frac{1}{n\omega_0} \cos(n\omega_0 t) \Big|_{-T/2}^0 - \frac{1}{n\omega_0} \cos(n\omega_0 t) \Big|_0^{T/2} \right] \\
 &= \frac{1}{n\pi} [(1 - \cos(n\pi)) - (\cos(n\pi) - 1)] \\
 &= \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \quad \text{para } n \neq 0
 \end{aligned}$$

Prof. Jorge Rueda

Curso 2021

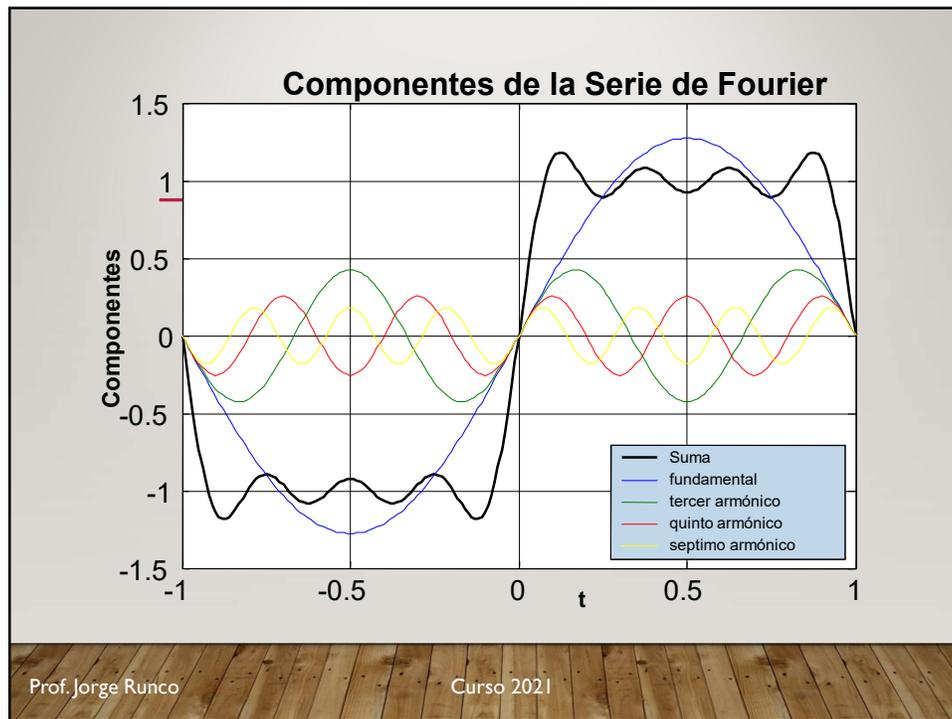
25

Serie de Fourier: Finalmente la Serie de Fourier queda como

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left[ \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \operatorname{sen}(5\omega_0 t) + \dots \right]$$

En la siguiente figura se muestran: la componente fundamental y los armónicos 3, 5 y 7 así como la suma parcial de estos primeros cuatro términos de la serie para  $\omega_0 = \pi$ , es decir,  $T=2$ :

26



27

## EJEMPLO. CIRCUITO RC CON ONDA CUADRADA

---

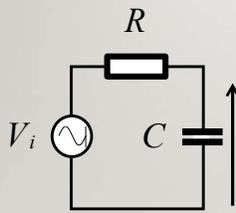
- Sabemos como resolver el circuito para excitación senoidal. Una sola frecuencia.
- Por Fourier la onda cuadrada podemos descomponerla en una suma de señales senoidales cada una de distinta frecuencia.
- La idea es calcular la respuesta (tensión de salida) para cada frecuencia senoidal y como el sistema es lineal sumarlas para obtener la respuesta total.
- Recordemos también que el concepto de impedancia es para  $f$  senoidales.

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

28

## RC CON EXCITACIÓN SENOIDAL RESPUESTA PERMANENTE



$$V_o = I \cdot X_c = \frac{V_i}{R + X_c} \cdot X_c = \frac{V_i}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{1}{j\omega C}$$

$$V_o = \frac{V_i}{1 + j\omega CR} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \Leftarrow$$

$$\varphi = \arctan(-\omega CR) \Leftarrow$$

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

29

- Calculamos  $H(j\omega)$  para  $\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, \dots$

$$H(j\omega_0) = \frac{1}{1 + jRC\omega_0}$$

$$H(j3\omega_0) = \frac{1}{1 + jRC3\omega_0}$$

$$H(j5\omega_0) = \frac{1}{1 + jRC5\omega_0}$$

- Y multiplicamos este número complejo por cada coeficiente de Fourier de la señal de entrada para obtener el coeficiente de cada componente de la tensión de salida. (Para cada frecuencia).

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

30

- De acuerdo a lo calculado en el ppt anterior, H depende de la frecuencia porque hay elementos que almacenan energía y su reactancia dependen de la frecuencia.
- 
- En este caso H será un número complejo.
  - Para resolver el problema:
    - 1) Calculamos la Serie de Fourier de la onda cuadrada.
    - 2) Para cada f (coeficiente) multiplicamos la amplitud del mismo por el módulo de H y desplazamos el seno una fase dada por el ángulo de H
    - 3) Sumamos las respuestas individuales para obtener la respuesta total.

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

31

## R=1000 OHMS C=0.3 UF EN OCTAVE/MATLAB

%Fundamental f=500 Hz

$$H1 = 1 / (1 + j * 2 * \pi * 500 * 1000 * 0.3 * (10)^{-6});$$

$$H1M = \text{abs}(H1);$$

$$H1A = \text{angle}(H1);$$

$$f1 = H1M * (4/\pi) * \sin(2 * \pi * 500 * t + H1A);$$

%Tercer armónico f=1500 Hz = 3\*500

$$H3 = 1 / (1 + j * 2 * \pi * 3 * 500 * 1000 * 0.3 * (10)^{-6});$$

$$H3M = \text{abs}(H3);$$

$$H3A = \text{angle}(H3);$$

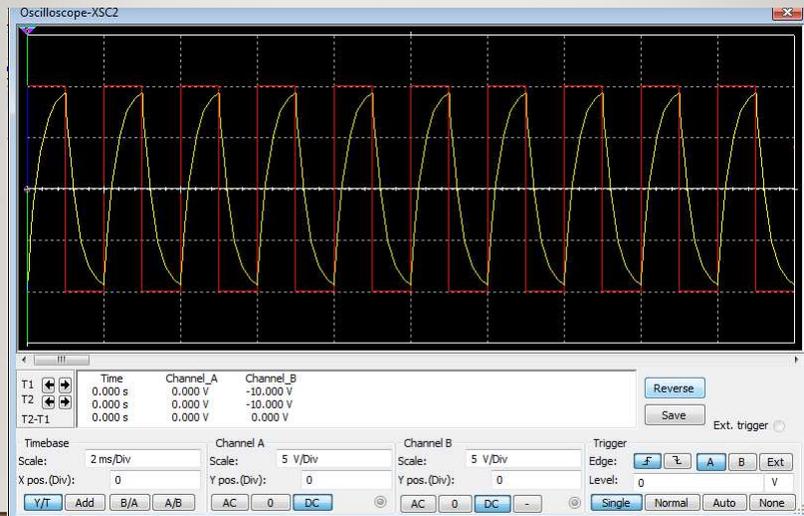
$$f3 = H3M * (4/(3 * \pi)) * \sin(2 * \pi * 3 * 500 * t + H3A);$$

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

32

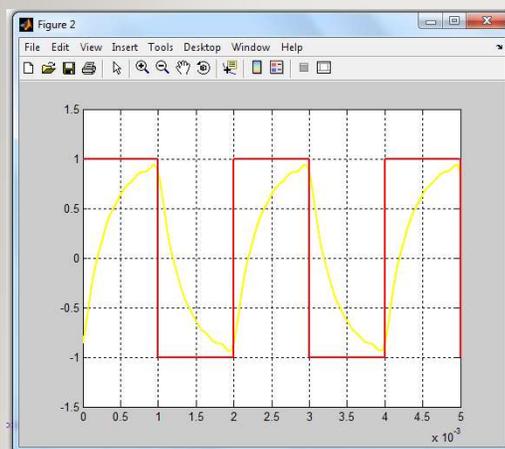
## ONDA CUADRADA 500 HZ. $R_1 = 1\text{K}\Omega$ $C_1 = 0.3\mu\text{F}$



Prof. Jorge Runco

Curso 2021

33



En rojo está dibujada la señal de entrada y en amarillo la señal de salida, obtenida con un programa Octave/Matlab. Comparar con la imagen anterior obtenida de la simulación de un osciloscopio (Multisim).

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

34

## FORMA COMPLEJA DE LA SERIE DE FOURIER

Consideremos la serie de Fourier para una función periódica  $f(t)$ , con periodo  $T=2\pi/\omega_0$ .

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)]$$

Es posible obtener una forma alternativa usando las fórmulas de Euler:

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t})$$

Donde  $j = \sqrt{-1}$        $\text{sen}(n\omega_0 t) = \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})$

## FORMA COMPLEJA DE LA SERIE DE FOURIER

Sustituyendo

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + b_n \frac{1}{2j}(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})]$$

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega_0 t}]$$

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$$

Y definiendo:

## FORMA COMPLEJA DE LA SERIE DE FOURIER

---

La serie se puede escribir como

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t})$$

O bien,

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Es decir,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

37

A la expresión obtenida

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Se le llama forma compleja de la serie de Fourier y sus coeficientes  $c_n$  pueden obtenerse a partir de los coeficientes  $a_n$ ,  $b_n$  como ya se dijo, o bien:

Para  $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

38

Los coeficientes  $c_n$  son números complejos, y también se pueden escribir en forma polar:

$$c_n = |c_n| e^{j\phi_n}$$

$$c_{-n} = c_n^* = |c_n| e^{-j\phi_n}$$

Donde

$$|c_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \phi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Para todo  $n \neq 0$ ,

Para  $n=0$ ,  $c_0$  es un número real:

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0$$

## EXPONENCIAL COMPLEJA (LO MISMO QUE ANTES)

- Asociado a  $c$ /exponencial compleja existe un conjunto de señales relacionadas armónicamente, sus frecuencias son múltiplos enteros de una única frecuencia  $\omega_0$
- Para  $c_k$   $\phi_k$  es una función periódica de frecuencia fundamental  $|k|\omega_0$ .

$$\Rightarrow \phi_k(t) = e^{j\omega_0 t k} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Una combinación lineal de dichas señales :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

- también es periódica con período  $T_0$  y se conoce como representación por Series de Fourier de  $x(t)$ . Expresa la descomposición de la señal  $x(t)$  como combinación lineal de  $k$  exponenciales complejas:
- Con amplitudes  $C_k$  discretas
- Para un conjunto discreto de frecuencias  $k\omega_0$  relacionadas armónicamente

41

## FORMAS ALTERNATIVAS

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) - b_k \sin(k\omega_0 t)] \quad \leftarrow \equiv$$

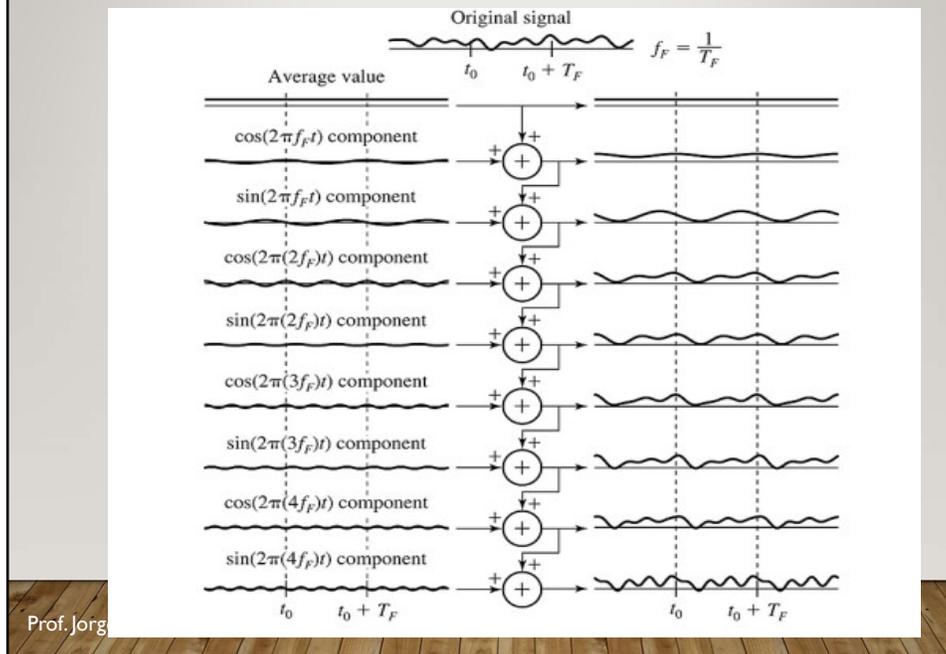
$$x(t) = a_0 + a_1 \left( \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \right) + a_2 \left( \frac{e^{j2\omega_0 t} + e^{-j2\omega_0 t}}{2} \right) + \dots + b_1 \left( \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \right) + b_2 \left( \frac{e^{j2\omega_0 t} - e^{-j2\omega_0 t}}{2} \right) + \dots$$

$$x(t) = a_0 + e^{j\omega_0 t} \left( \frac{a_1}{2} - j \frac{b_1}{2} \right) + e^{-j\omega_0 t} \left( \frac{a_1}{2} + j \frac{b_1}{2} \right) + e^{j2\omega_0 t} \left( \frac{a_2}{2} - j \frac{b_2}{2} \right) + e^{-j2\omega_0 t} \left( \frac{a_2}{2} + j \frac{b_2}{2} \right) + \dots$$

$$x(t) = \dots + A_{-1} e^{-j\omega_0 t} + A_0 + A_1 e^{j\omega_0 t} + \dots \quad \leftarrow \equiv$$

42

## FORMA TRIGONOMÉTRICA



43

## TEOREMA DE FOURIER

- Toda señal periódica que cumpla las condiciones de Dirichlet :
  - Integrable en el período
  - N° finito de máximos y mínimos en el período
  - N° finito de discontinuidades
- Puede reproducirse como una superposición de componentes sinusoidales de frecuencias  $f_0, 2f_0, \dots$
- La componente con el mismo período que la función original se denomina *fundamental*.
- Las componentes con  $f$  superiores a la fundamental se denominan *armónicos*.

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

44

## DETERMINACIÓN DE LA REPRESENTACIÓN EN SERIES DE FOURIER DE UNA SEÑAL PERIÓDICA CONTINUA

- Suponiendo que una señal periódica pudiera representarse con la serie anterior, necesitaríamos un procedimiento para determinar los coeficientes

$c_k$ :

$$x(t) e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}$$

- Integrando ambos miembros de 0 a T

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

45

$$\int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$\int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \left[ \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt \right]$$

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \int_0^T \cos(k-n)\omega_0 t dt + j \int_0^T \text{sen}(k-n)\omega_0 t dt$$

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

46

Este par de ecuaciones define la serie de Fourier de una señal periódica continua :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Ecuación de análisis

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Ecuación de síntesis

47

## ESPECTROS DE FRECUENCIA

- ✓ A la gráfica de la magnitud de los coeficientes  $c_n$  contra la frecuencia angular  $\omega$  de la componente correspondiente se le llama el espectro de amplitud de  $f(t)$ .
- ✓ A la gráfica del ángulo  $\phi_n$  de fase de los coeficientes  $c_n$  contra  $\omega$ , se le llama el espectro de fase de  $f(t)$ .
- ✓ Como  $n$  sólo toma valores enteros, la frecuencia angular  $\omega = n\omega_0$  es una variable discreta y los espectros mencionados son gráficas discretas.

48

## ESPECTROS DE FRECUENCIA

- ❖ Dada una función periódica  $f(t)$ , le corresponde una y sólo una serie de Fourier, es decir, le corresponde un conjunto único de coeficientes  $c_n$ .
- ❖ Por ello, los coeficientes  $c_n$  especifican a  $f(t)$  en el *dominio de la frecuencia* de la misma manera que  $f(t)$  especifica la función en el *dominio del tiempo*.

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

49

## PROPIEDADES DE LA SERIE DE FOURIER

### ➤ Linealidad

$$\begin{array}{l} x(t) \longrightarrow a_k \qquad y(t) \longrightarrow b_k \\ Ax(t)+By(t) \longrightarrow c_k = Aa_k + Bb_k \end{array}$$

### ➤ Desplazamiento en el tiempo

$$\begin{array}{l} x(t) \longrightarrow a_k \\ x(t-t_0) \longrightarrow a_k e^{-jk\omega_0 t_0} \end{array}$$

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

50

## PROPIEDADES DE LA SERIE DE FOURIER

---

- Escalamiento de tiempo

$$x(at) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jka\omega_0 t}$$

- Relación de Parseval

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

## SIMETRÍA DE LA FORMA DE ONDA

---

- ✓ Función par
- ✓ Función impar
- ✓ Simetría de  $\frac{1}{2}$  onda

$$f(t) = -f(t+T/2)$$

La porción negativa de la onda es el reflejo de la porción positiva, desplazada  $\frac{1}{2}$  período.

## SIMETRÍA DE LA FORMA DE ONDA

---

- ❖ Simetría de cuarto de onda
- ❖ Si una función periódica  $f(t)$  tiene simetría de media onda y además es una función par ó impar, entonces  $f(t)$  tiene simetría de cuarto de onda par ó impar.

Prof. Jorge Runco

Curso 2021

53

## ¿QUÉ PODEMOS DECIR DE LOS COEFICIENTES CON LA SIMETRÍA?

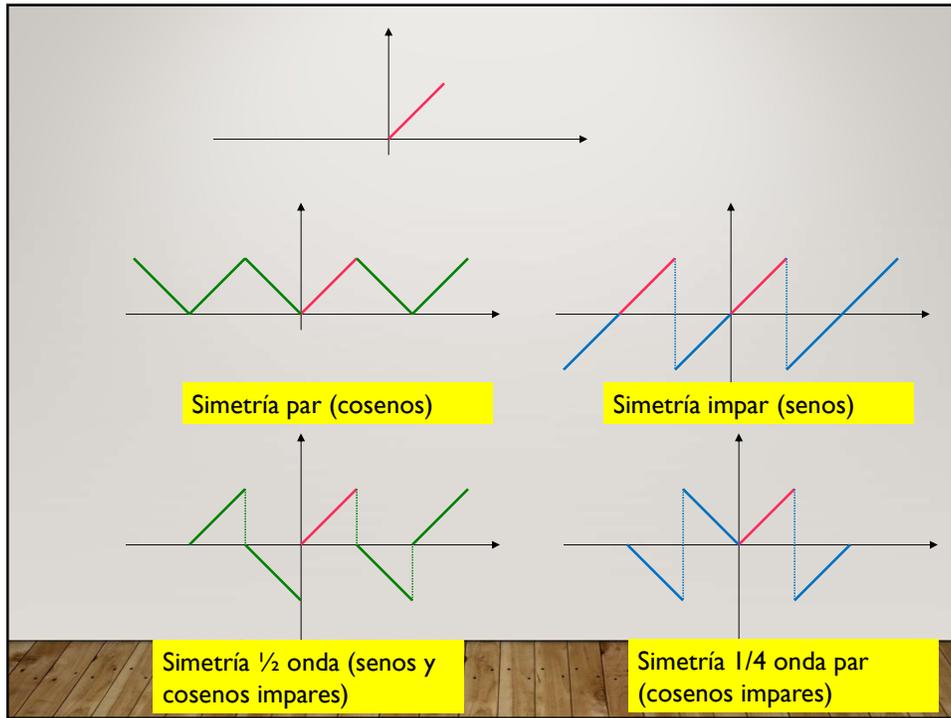
---

- Función par  $\Rightarrow a_0$  y  $a_n$  sólo cos
- Función impar  $\Rightarrow b_n$  sólo senos
- Función con simetría de  $\frac{1}{2}$  onda  $\Rightarrow$  armónicos impares
- Función con simetría de  $\frac{1}{4}$  de onda par  $\Rightarrow$  armónicas impares coseno
- Función con simetría de  $\frac{1}{4}$  de onda impar  $\Rightarrow$  armónicas impares senos

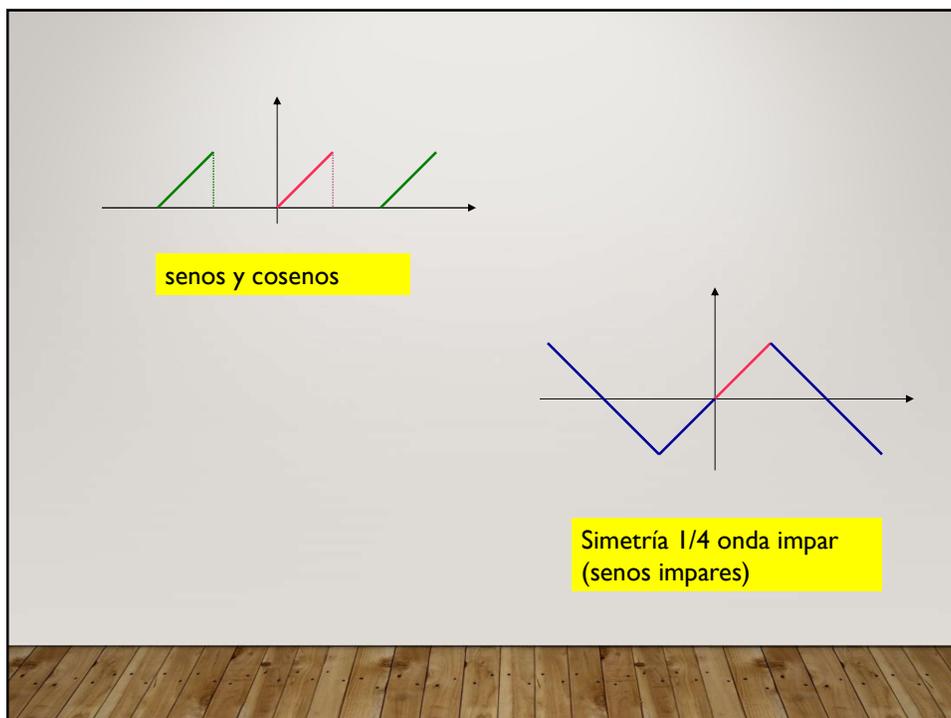
Prof. Jorge Runco

Curso 2021

54

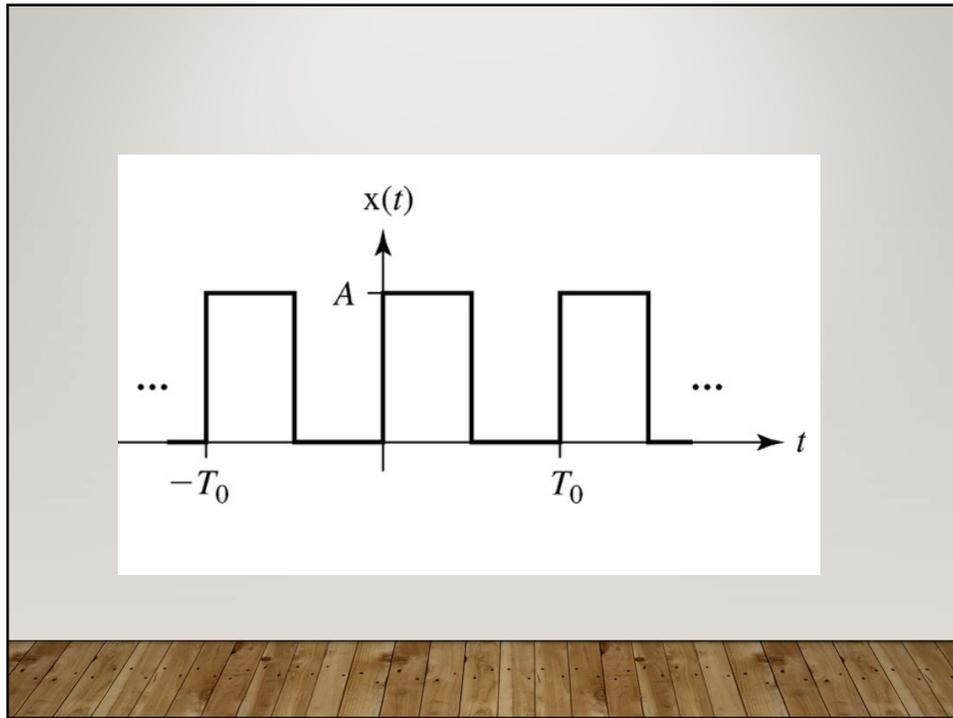


55

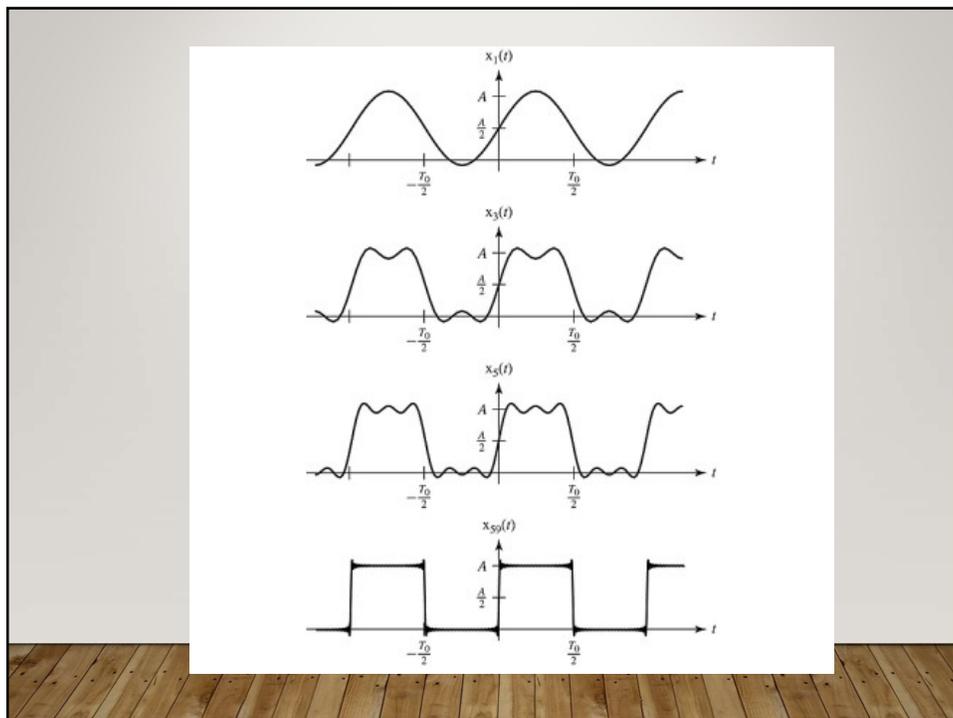


56





59



60

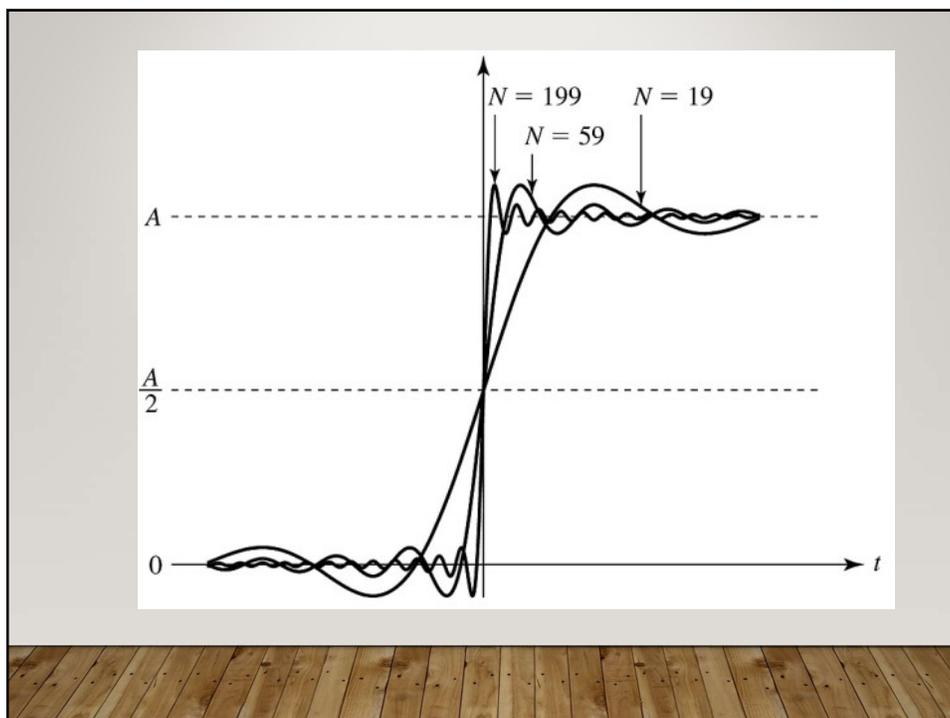
## CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER

- Las señales que encontramos en el mundo real cumplen las condiciones de Dirichlet. Por lo tanto :
- Las series de Fourier= $x(t)$  donde  $x(t)$  es continua
- Las series de Fourier="punto medio" en puntos de discontinuidad.
- Convergencia. Fenómeno de Gibbs en puntos de discontinuidad.

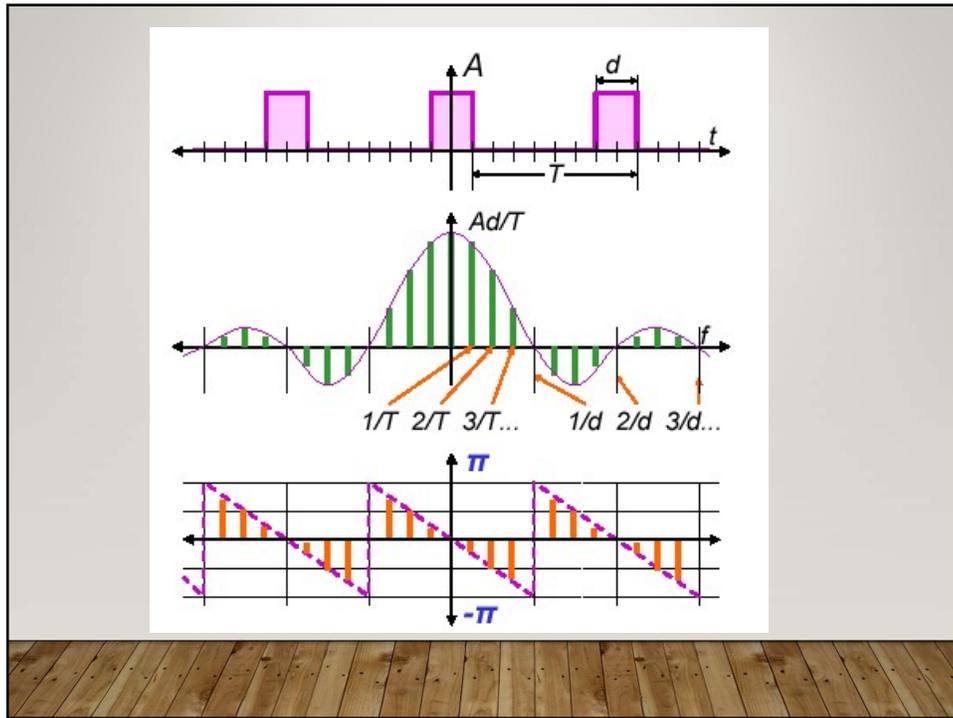
Prof. Jorge Runco

Curso 2021

61



62



63