

ANÁLISIS DE SEÑALES CURSO 2022

TRANSFORMADA DE FOURIER EN TC

PROF. JORGE RUNCO

TF EN TC

- Derivación del par TF de TC
- Ejemplos de TF
- TF de señales periódicas
- Propiedades de la TF en TC

DERIVACIÓN

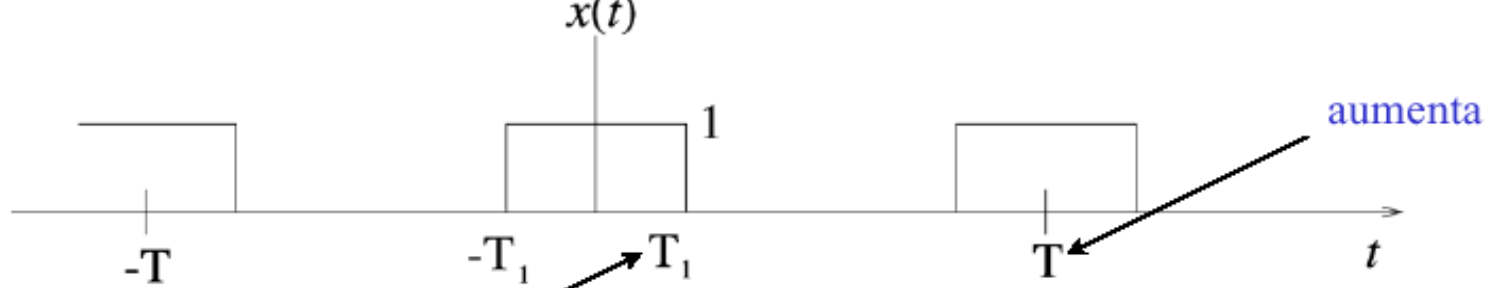
- La serie de Fourier nos permite obtener una representación en el dominio de la frecuencia de funciones periódicas $f(t)$.
- ¿Es posible extender de alguna manera las series de Fourier para obtener una representación en el dominio de la frecuencia de funciones no periódicas?

DERIVACIÓN

- Sea $x(t)$ una señal aperiódica. Pensemos como el límite de una señal periódica que $T \rightarrow \infty$
- Para una señal periódica las componentes armónicas están separadas $\omega_0 = 2\pi/T$
- Como $T \rightarrow \infty$, $\omega_0 \rightarrow 0$ y las componentes armónicas están c/vez más cerca en f

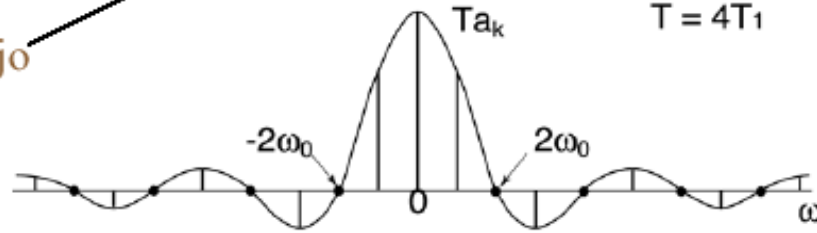


Serie de Fourier  Integral de Fourier



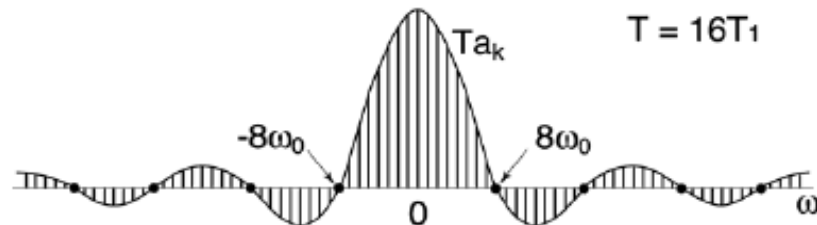
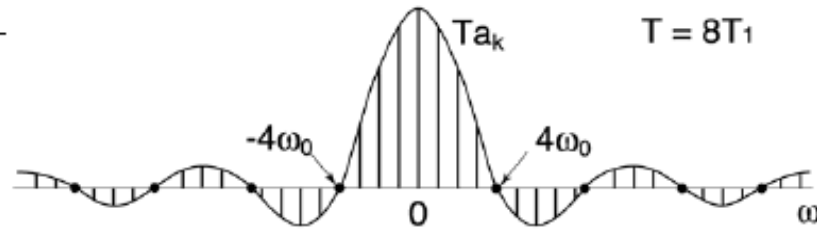
mantener fijo

$$|a_k| = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

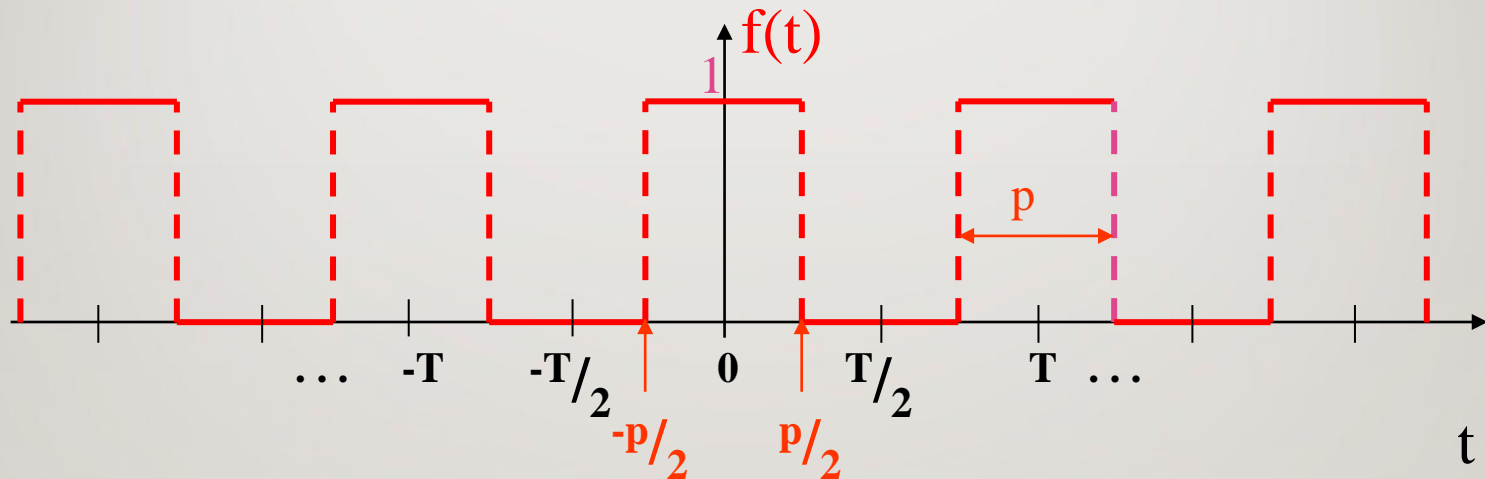


Los puntos de frecuencia discreta se vuelven más densos en ω a medida que aumenta T

$$T a_k = \left. \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega} \right|_{\omega = k\omega_0}$$



Tren de pulsos de amplitud 1, ancho p y periodo T :



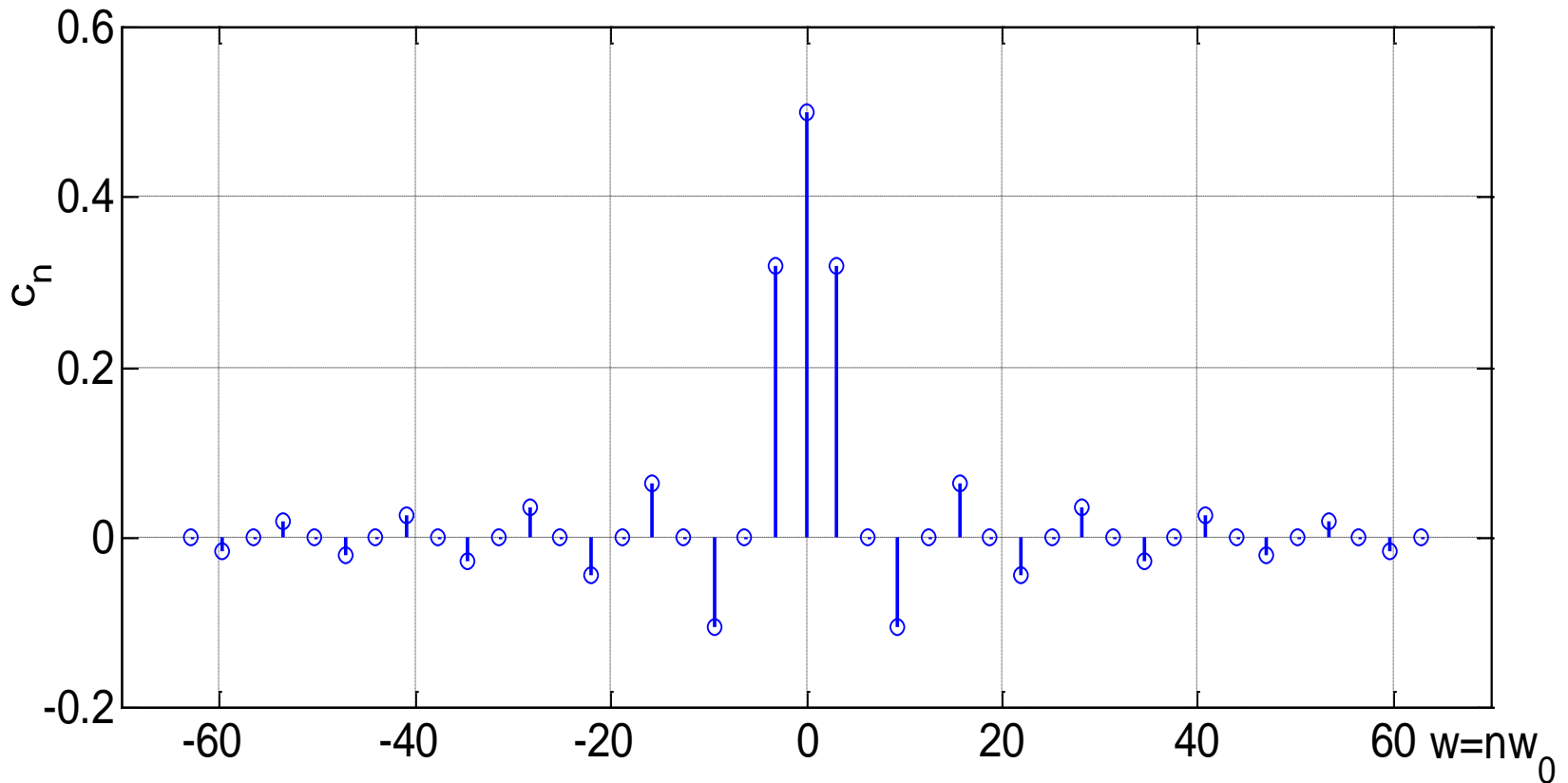
$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < t < -\frac{p}{2} \\ 1 & -\frac{p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Los coeficientes de la serie compleja de Fourier en este caso resultan puramente reales:

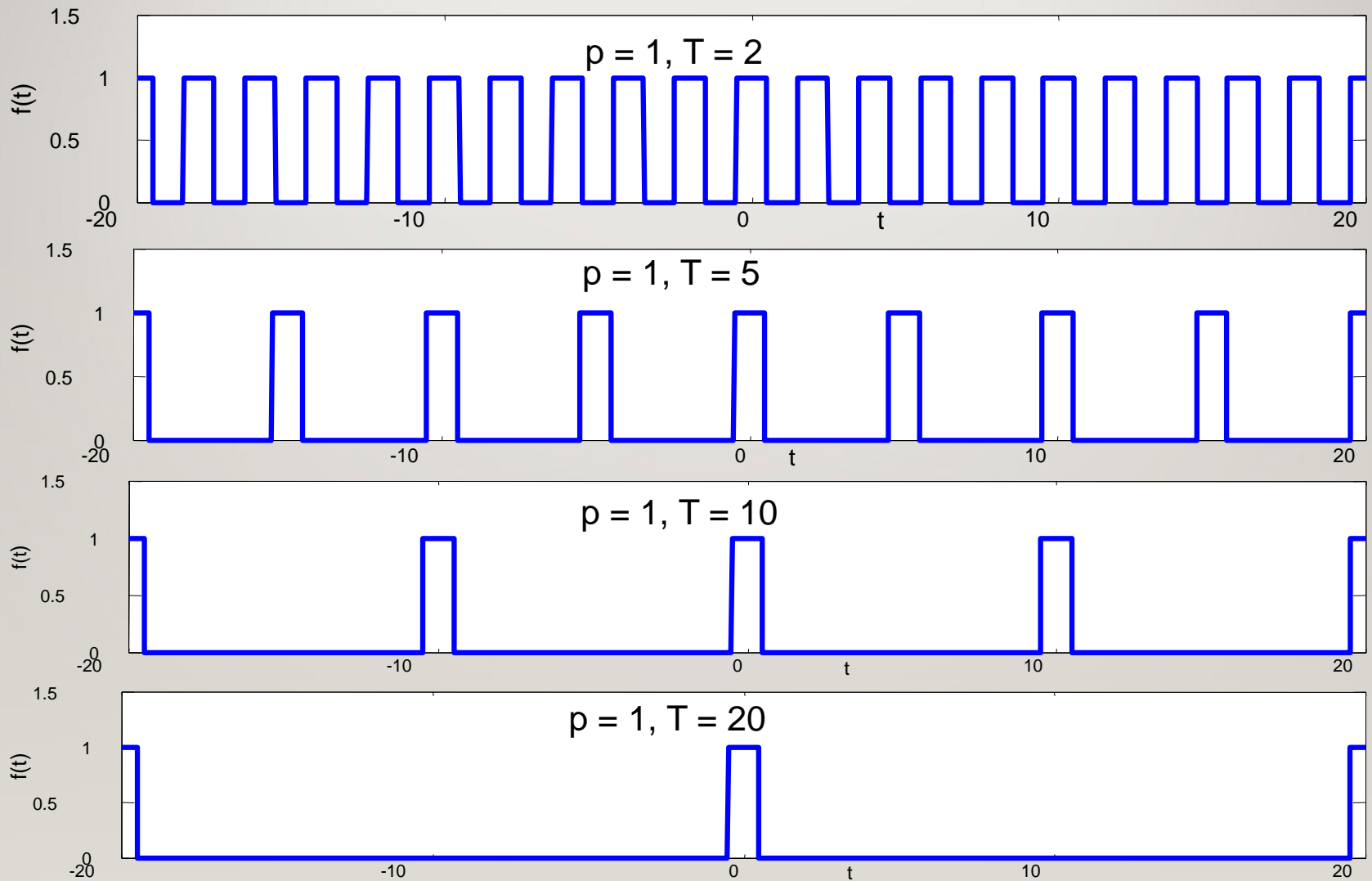
$$c_n = \left(\frac{p}{T} \right) \frac{\text{sen}(n\omega_0 \frac{p}{2})}{(n\omega_0 \frac{p}{2})}$$

El espectro de frecuencia correspondiente lo obtenemos (en este caso) graficando c_n contra $w = n\omega_0$.

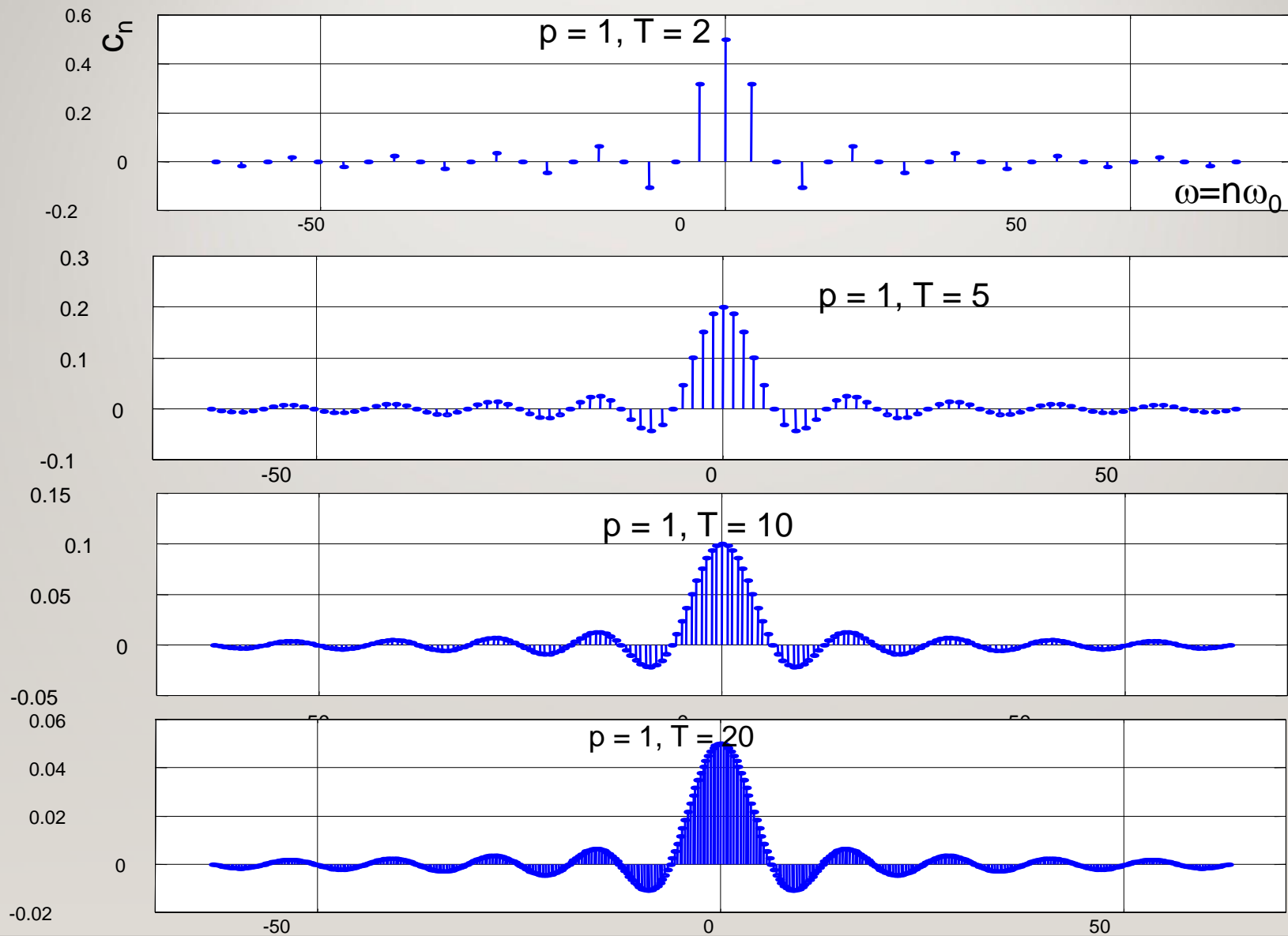
Espectro del tren de pulsos para $p = 1, T = 2$



Si el período del tren de pulsos aumenta...

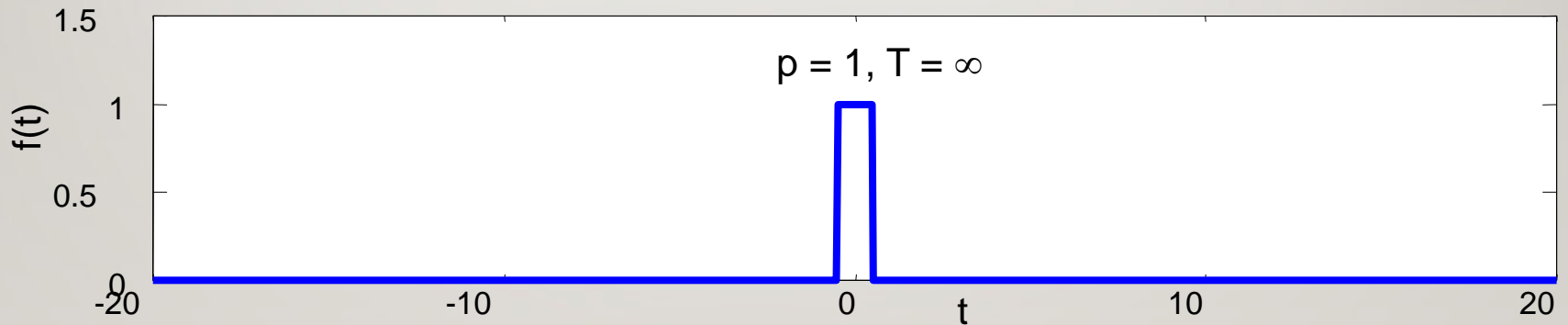


...el espectro se hace más "denso"



Derivación

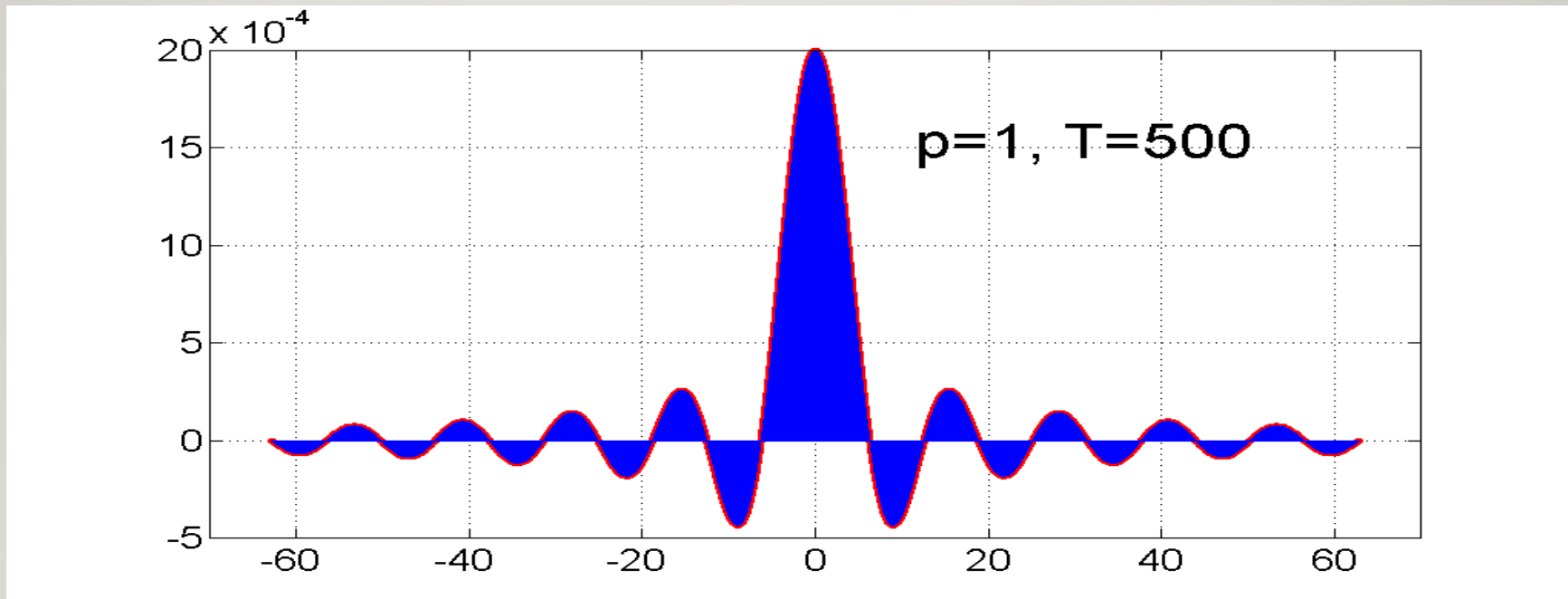
En el límite cuando $T \rightarrow \infty$, la función deja de ser periódica:



¿Qué pasa con los coeficientes de la serie de Fourier?

Derivación

Si se hace T muy grande ($T \rightarrow \infty$), el espectro se vuelve "continuo":



DERIVACIÓN

- La señal periódica

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{donde}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-j\omega_0 kt} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega_0 kt} dt$$

- Si definimos

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0)$$



DERIVACIÓN

$$x(t) = \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

Dado que $T \rightarrow \infty$ entonces $\sum \omega_0 \rightarrow \int d\omega$

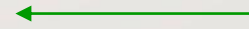
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Ecuación de síntesis

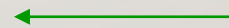
RESUMIENDO

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$



**Identidad de
Fourier
o antitrans-
formada de
Fourier**

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$



**Transformada
de Fourier**

Estas expresiones nos permiten calcular la expresión $F(\omega)$ (dominio de la frecuencia) a partir de $f(t)$ (dominio del tiempo) y viceversa.

PAR DE TF

- ✓ Las ecuaciones anteriores son conocidas como el par de transformadas de Fourier. Las señales periódicas las expresamos como una suma de exponenciales complejas de amplitud a_k y para un conjunto discreto de frecuencias relacionadas armónicamente. Para señales aperiódicas, las exponenciales complejas ocurren para una sucesión continua de frecuencias y de “amplitud” $X(j\omega)d\omega/2\pi$

RELACIÓN ENTRE LOS COEFICIENTES DE LA SFY LA TF

- Supongamos que $x(t)$ es una señal periódica con período T y coeficientes de Fourier a_k . $\tilde{x}(t)$ es una señal de duración finita que es igual a $x(t)$ en un período, entonces

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

- ya que $x(t)$ es cero fuera del intervalo T

➡
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} X(j\omega) \Big|_{\omega = k\omega_0}$$

CONVERGENCIA DE LA TF

➤ Nos referiremos también como condiciones de Dirichlet :

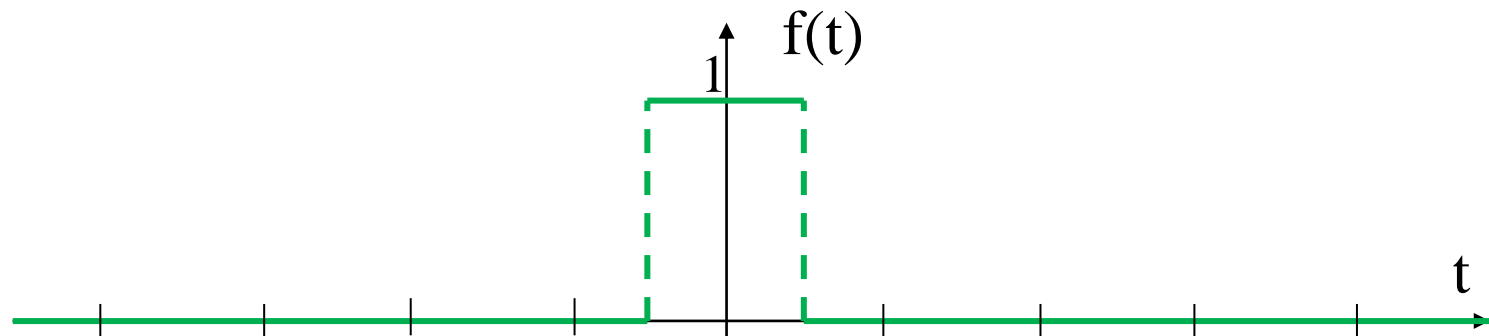
➤ $x(t)$ sea absolutamente integrable

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

➤ $x(t)$ tenga un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo finito

➤ $x(t)$ tenga un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito. Además cada discontinuidad debe ser finita.

Ejemplo. Calcular $F(\omega)$ para el pulso rectangular $f(t)$ siguiente:



Solución. La expresión en el dominio del tiempo de la función es:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{p}{2} \\ 1 & -\frac{p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t \end{cases}$$

Integrando:

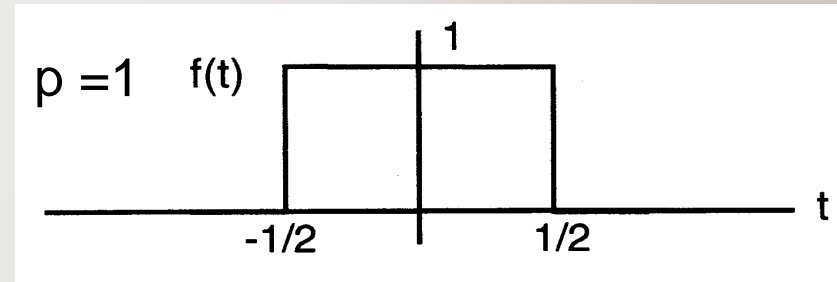
$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-p/2}^{p/2} e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-p/2}^{p/2} = \frac{1}{-i\omega} (e^{-i\omega p/2} - e^{i\omega p/2}) \end{aligned}$$

Usando la fórmula
de Euler:

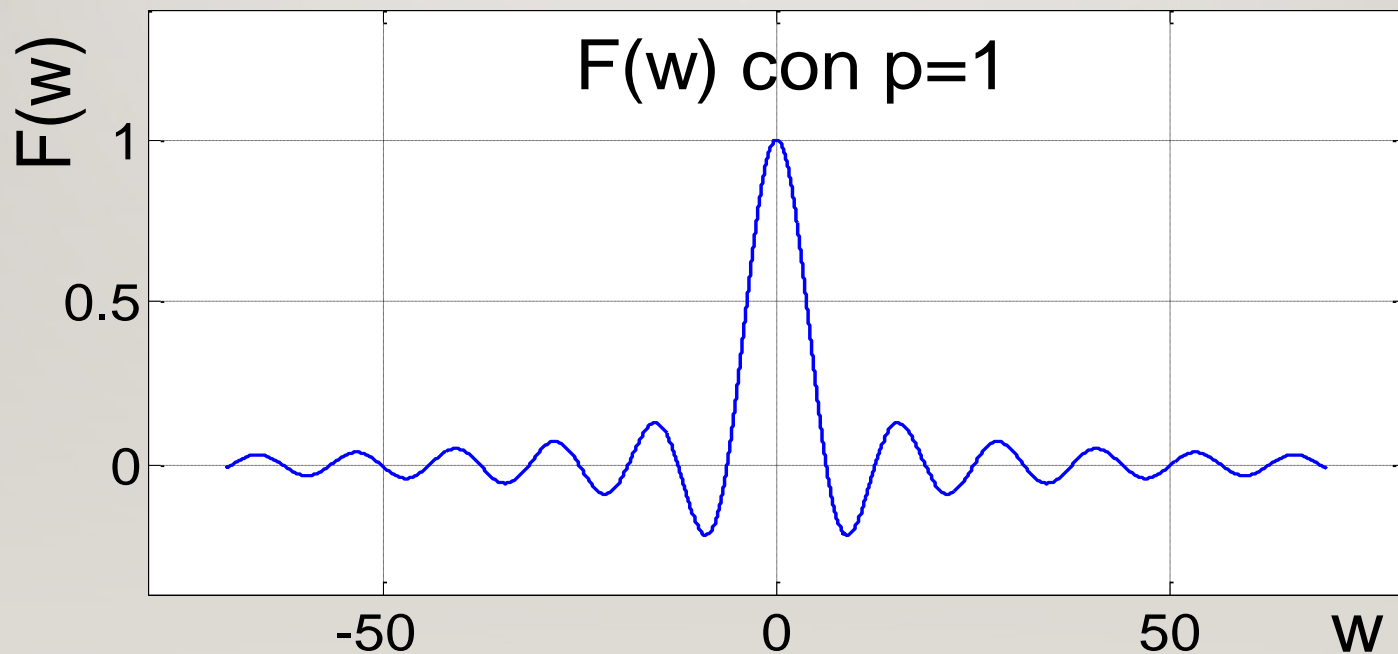
$$\text{sen}(\omega p / 2) = \frac{e^{i\omega p/2} - e^{-i\omega p/2}}{2i}$$

$$F(\omega) = p \frac{\text{sen}(\omega p / 2)}{\omega p / 2} = p \text{sinc}(\omega p / 2)$$

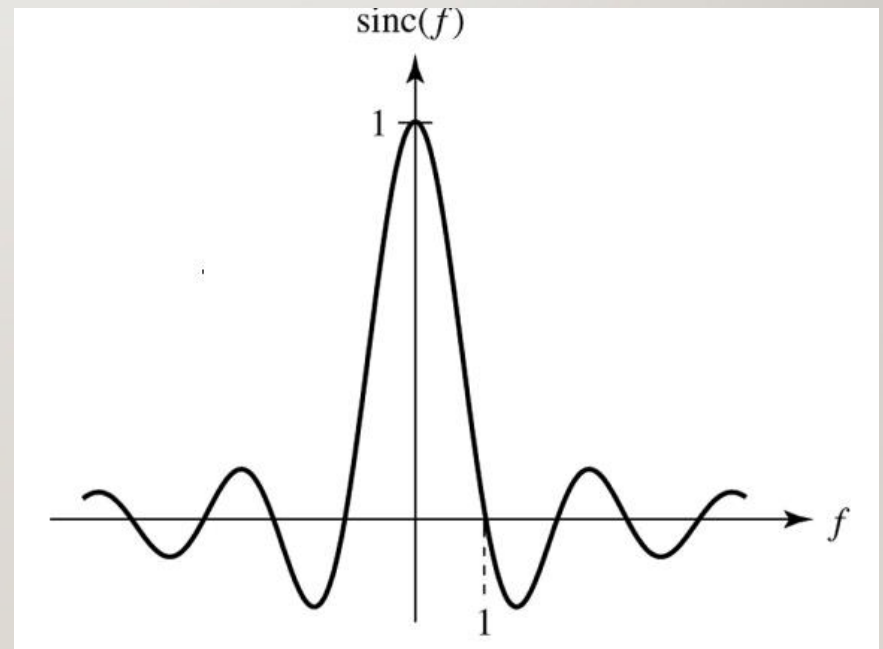
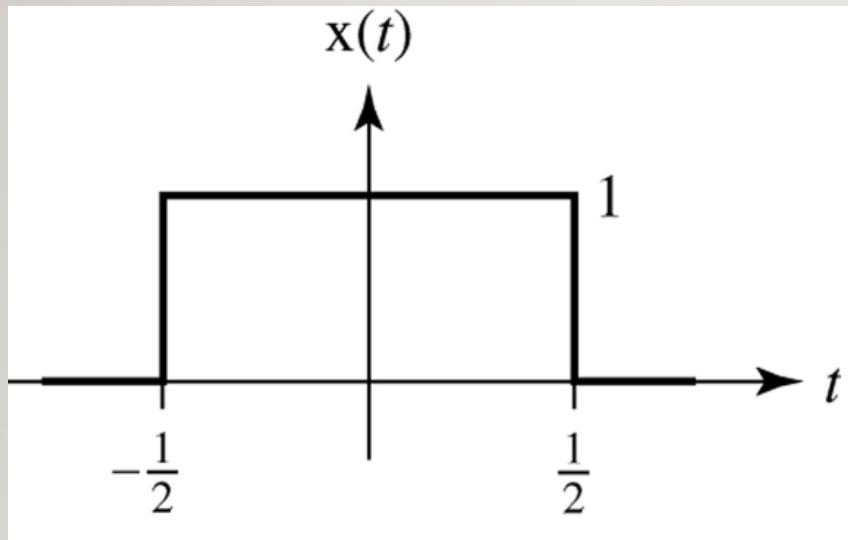
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{p}{2} \\ 1 & -\frac{p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t \end{cases}$$

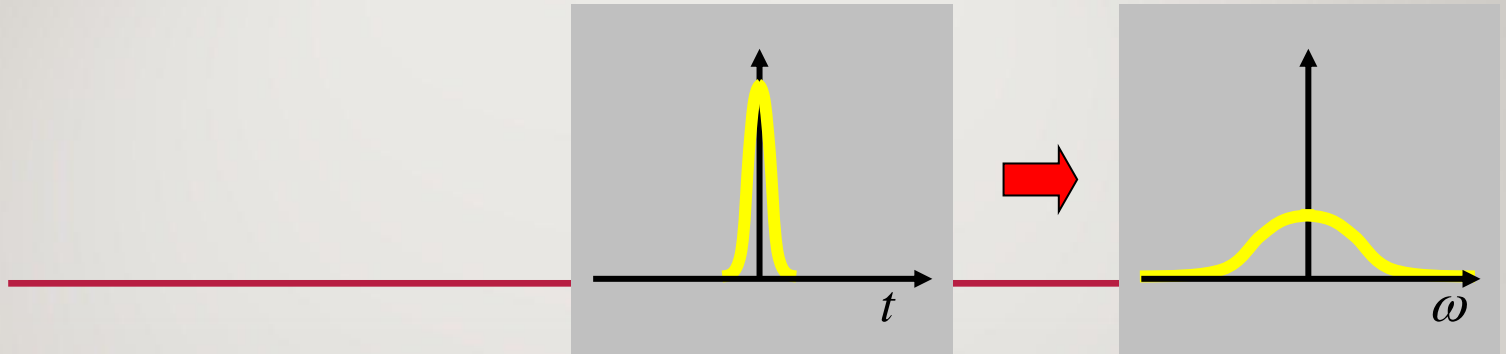


$$F(\omega) = p \operatorname{sinc}(\omega p / 2)$$

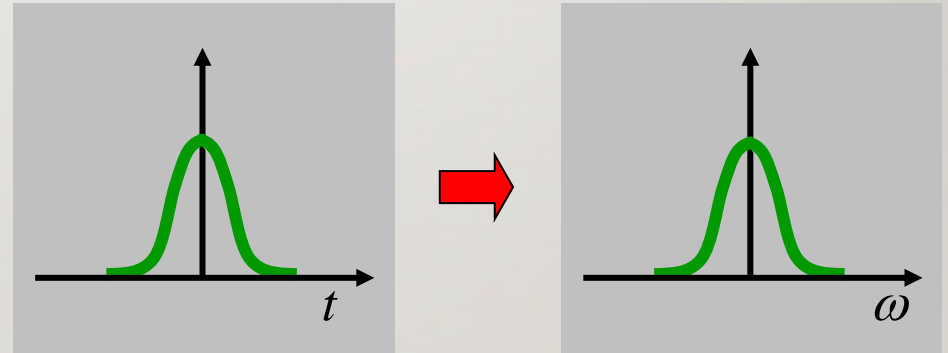


EJEMPLO

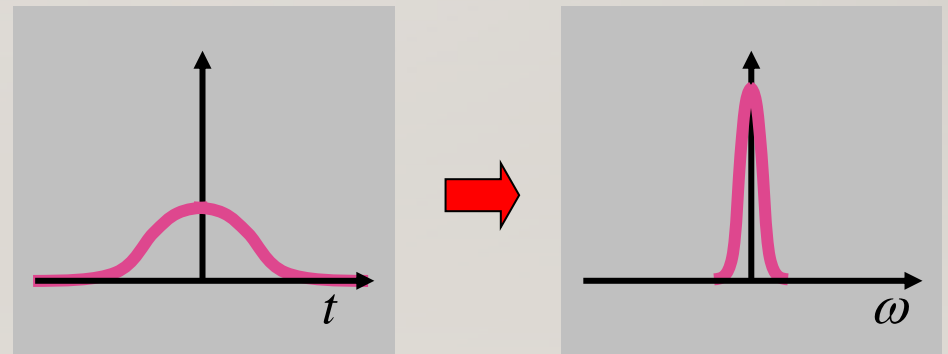


$f(t)$ $F(\omega)$ 

Mientras más corto es el pulso, más ancho es el espectro.



Esta es la esencia del principio de incertidumbre en mecánica cuántica.



LINEALIDAD

✓ Si $x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$

y

✓ $y(t) \longleftrightarrow Y(j\omega)$

entonces

✓ $ax(t)+by(t) \longleftrightarrow aX(j\omega)+bY(j\omega)$

DESPLAZAMIENTO DE TIEMPO

✓ Si $x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$

entonces

✓ $x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$

DIFERENCIACIÓN E INTEGRACIÓN

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(j\omega)$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

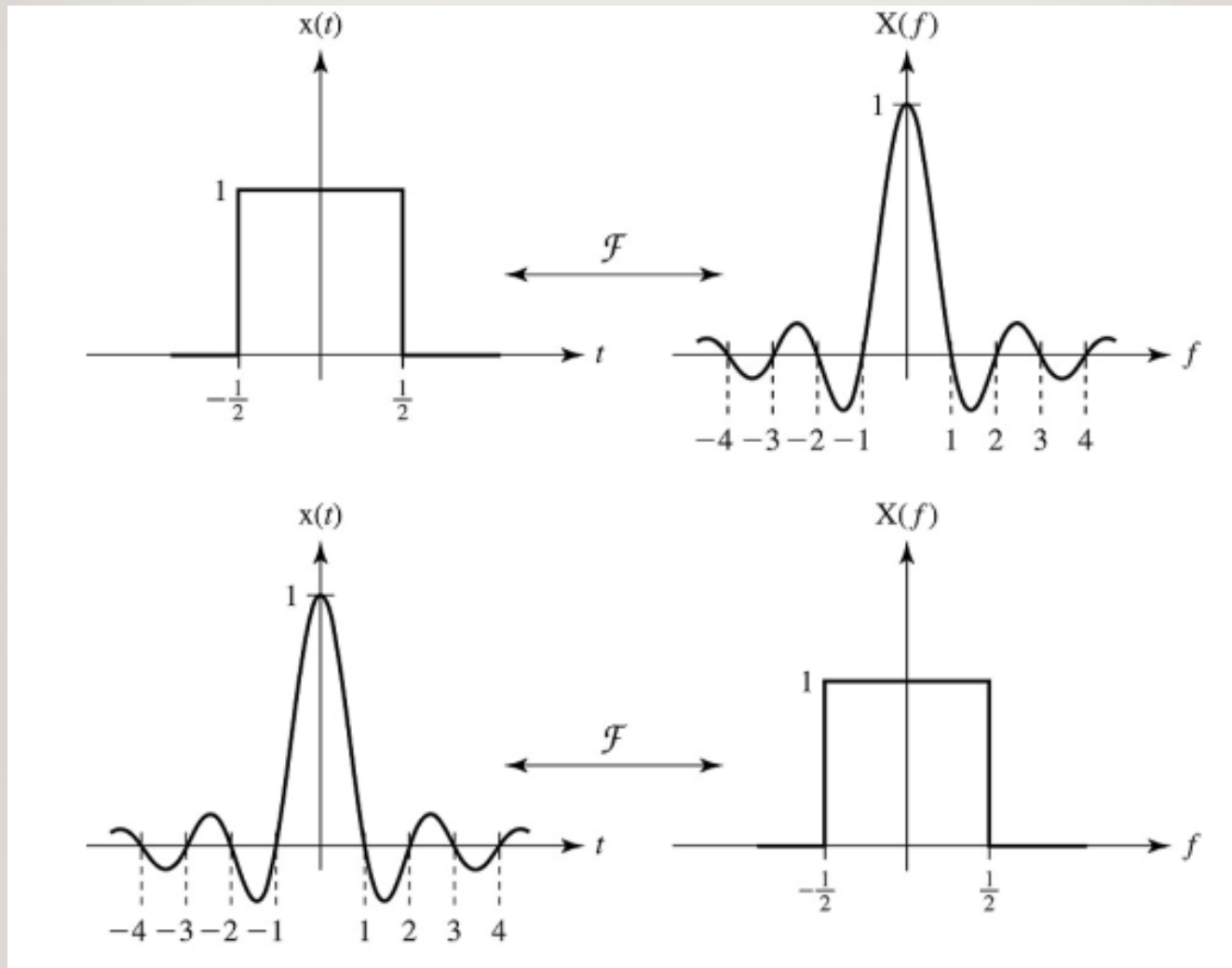
ESCALAMIENTO DE TIEMPO Y FRECUENCIA

✓ Si $x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$

entonces

✓ $x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X(j\omega/a)$

DUALIDAD



Propiedad	Señal Aperiódica	Transformada de Fourier
	$x(t)$ $y(t)$	$X(j\omega)$ $Y(j\omega)$
Linealidad	$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
Desplazamiento en el tiempo	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
Desplazamiento en frecuencia	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
Escalamiento de tiempo y de frecuencia	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Convolución	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega) Y(j\omega)$
Multiplicación	$x(t) y(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$
Diferenciación en el tiempo	$\frac{d}{dt} x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
Integración	$\int_{-\infty}^t x(t) dt$	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$
Diferenciación en frecuencia	$tx(t)$	$j \frac{d}{d\omega} X(j\omega)$
Simetría conjugada para señales reales	$x(t)$ real	$\left\{ \begin{array}{l} X(j\omega) = X(j\omega)^* \\ \text{Re}\{X(j\omega)\} = \text{Re}\{X(-j\omega)\} \\ \text{Im}\{X(j\omega)\} = -\text{Im}\{X(-j\omega)\} \\ X(j\omega) = X(-j\omega) \\ \angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega) \end{array} \right.$

RELACIÓN DE PARSEVAL

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

La energía total se puede calcular ya sea mediante el cálculo de la energía por unidad de tiempo integrando para todo tiempo, ó calculando la energía por unidad de frecuencia e integrando para todas las frecuencias.

• Un ejemplo: $F\{\text{rect}(t)\}$

$$\blacksquare X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\blacksquare = \int_{-1/2}^{+1/2} 1 \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

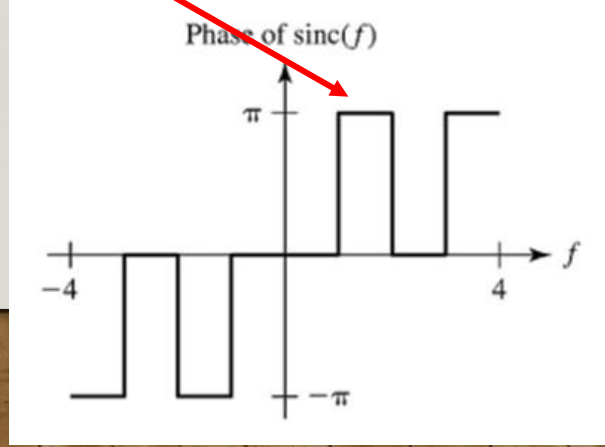
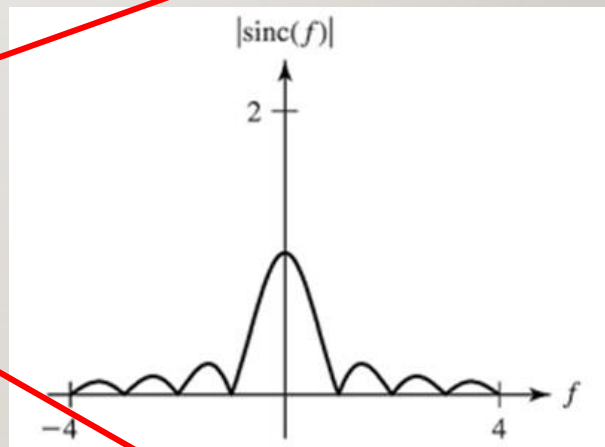
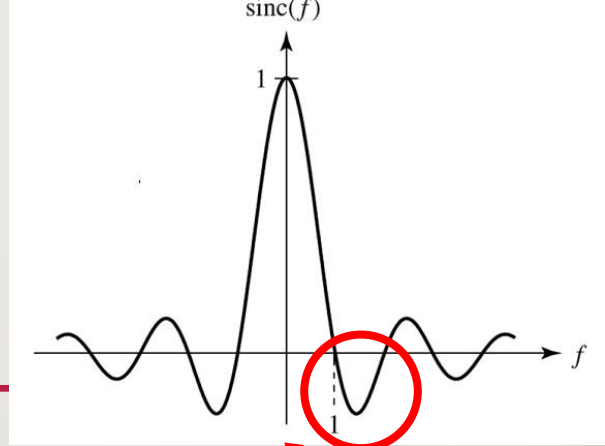
$$\blacksquare = -\frac{1}{j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{-1/2}^{+1/2}$$

$$\blacksquare = -\frac{1}{j2\pi f} \left[e^{-j2\pi f \frac{1}{2}} - e^{+j2\pi f \frac{1}{2}} \right]$$

$$\blacksquare = \frac{e^{+j2\pi f \frac{1}{2}} - e^{-j2\pi f \frac{1}{2}}}{2j} \frac{1}{\pi f}$$

$$\blacksquare = \frac{\sin \pi f}{\pi f} = \text{sinc}(f)$$

La amplitud tiene signo negativo. En fase corresponde a un ángulo de π grados



- Otro ejemplo $x(t)=\text{rect}(t-2)$

$$\blacksquare X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\blacksquare = \int_{3/2}^{5/2} 1 \cdot e^{-j2\pi f t} dt$$

$$\blacksquare = -\frac{1}{j2\pi f} e^{-j2\pi f t} \Big|_{3/2}^{5/2}$$

$$\blacksquare = -\frac{1}{j2\pi f} \left[e^{-j2\pi f \frac{5}{2}} - e^{-j2\pi f \frac{3}{2}} \right]$$

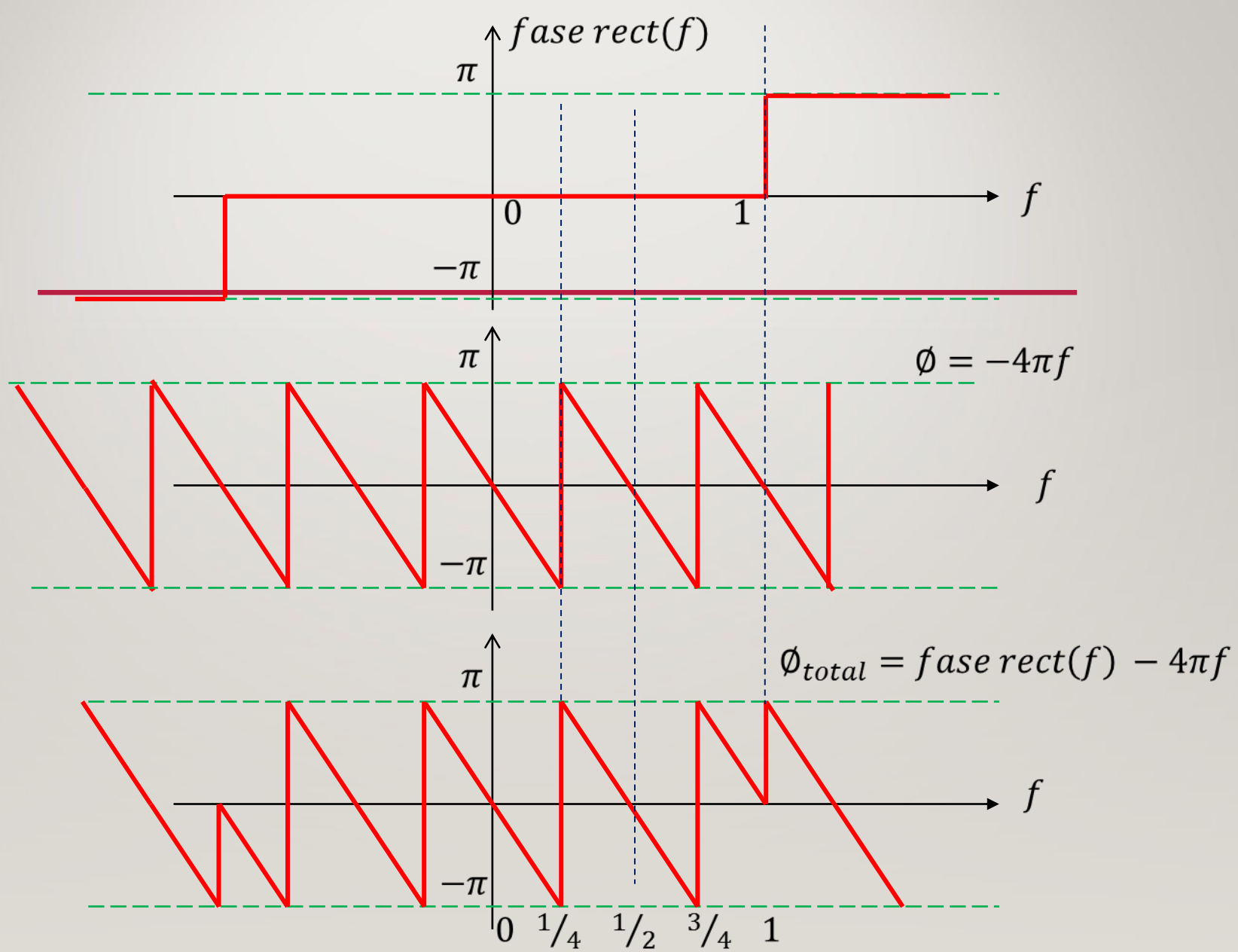
$$\blacksquare = \frac{e^{+j2\pi f \frac{1}{2}} - e^{-j2\pi f \frac{1}{2}}}{2j} \frac{e^{-j2\pi f 2}}{\pi f}$$

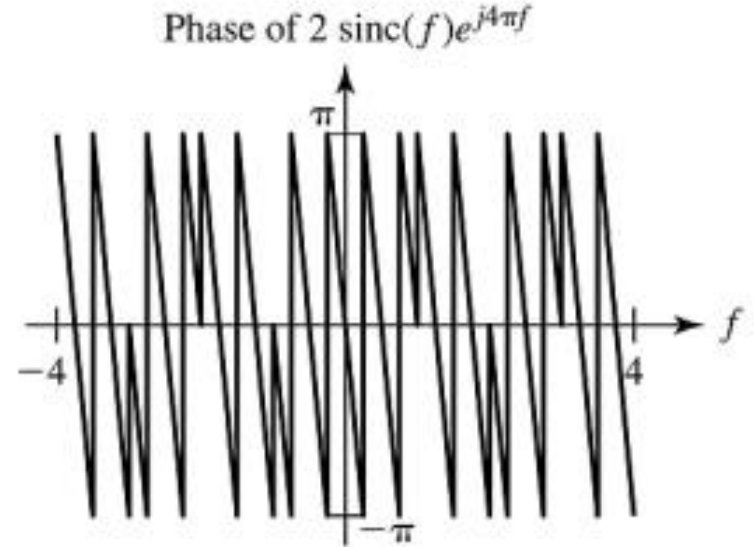
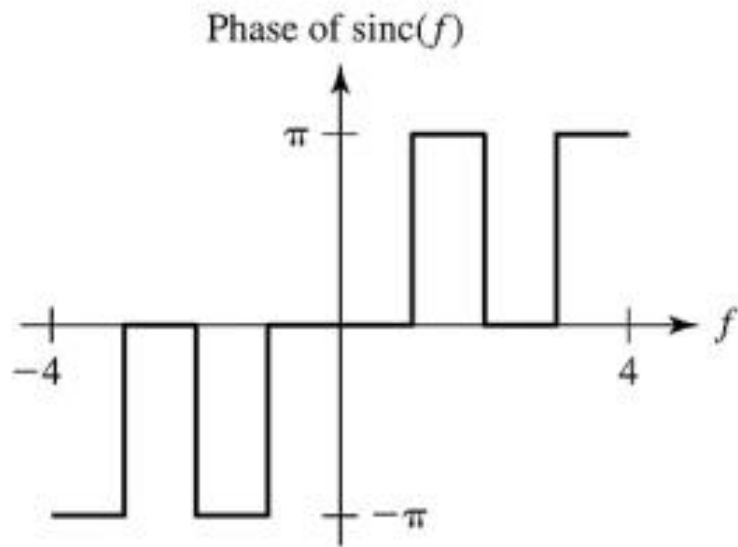
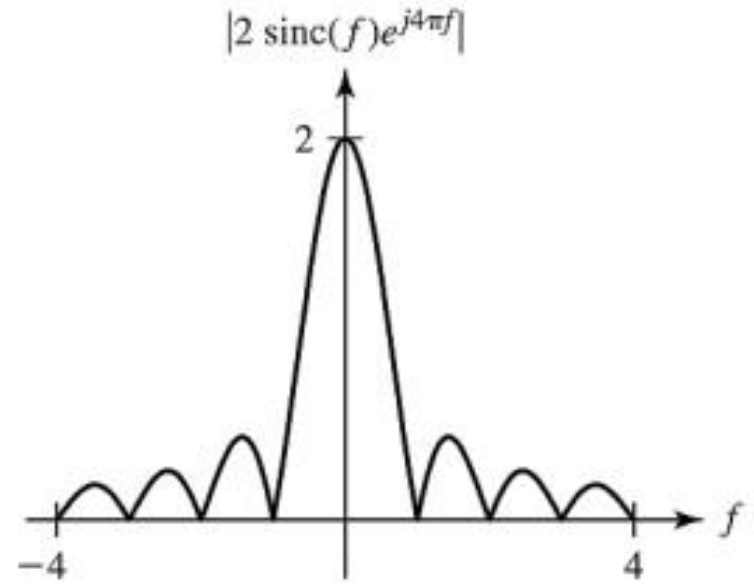
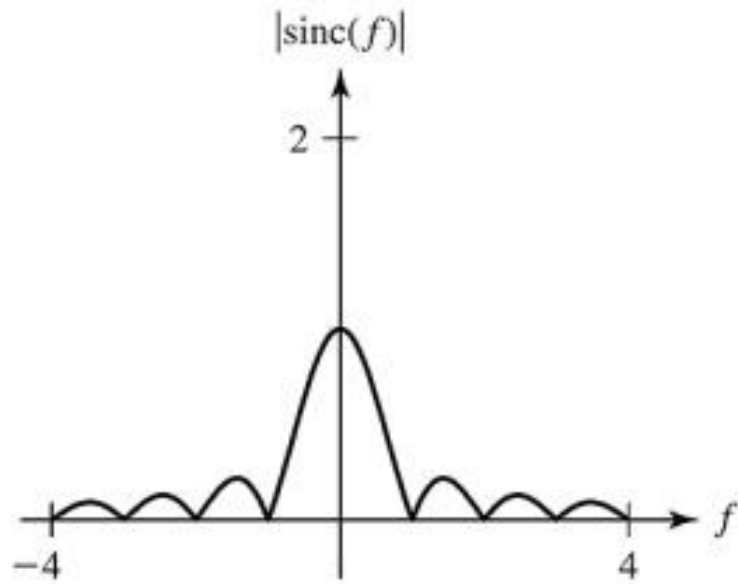
$$\blacksquare = e^{-j2\pi f 2} \frac{\sin \pi f}{\pi f} = e^{-j2\pi f 2} \text{sinc}(f)$$

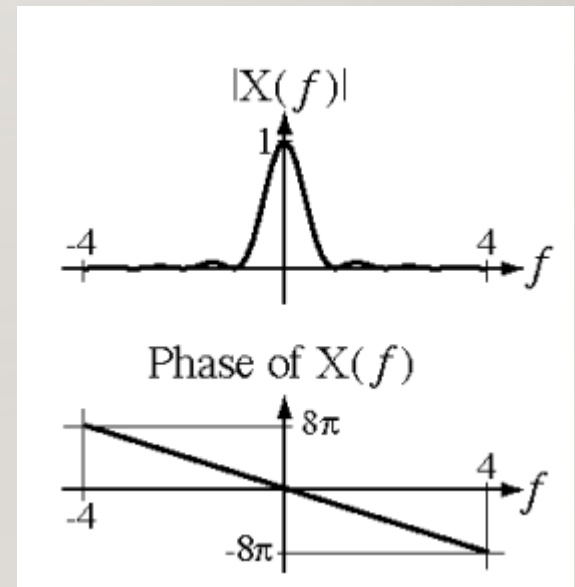
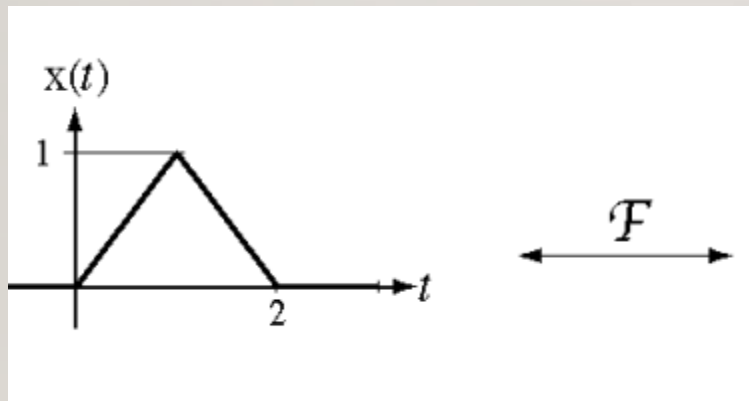
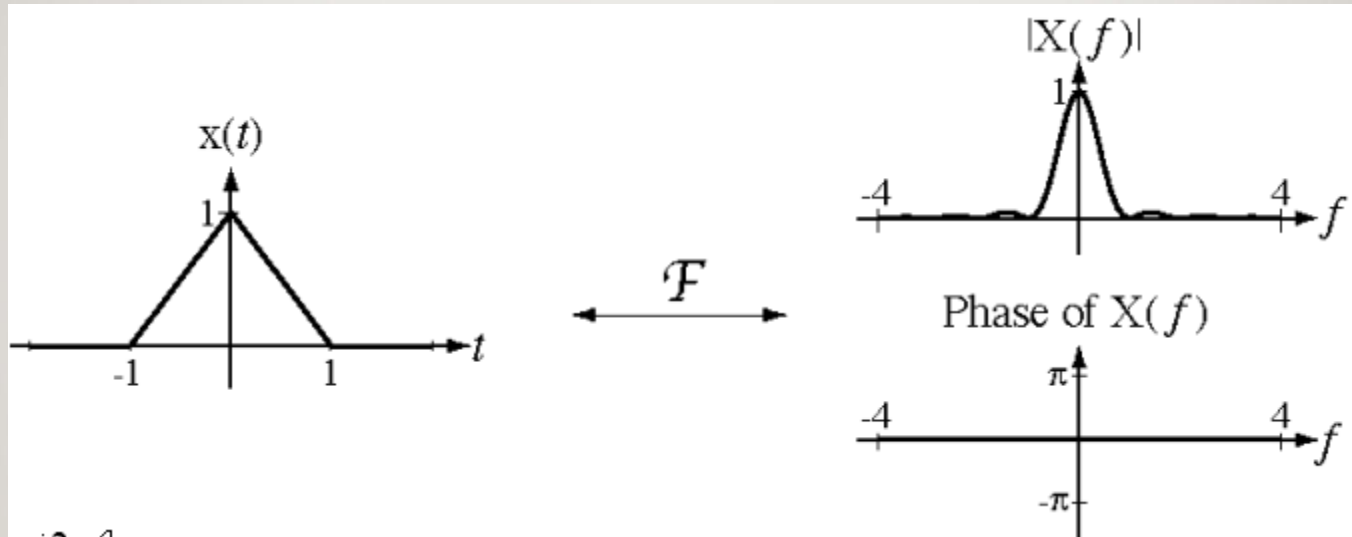
$$\blacksquare \text{ M\u00f3dulo} \rightarrow |e^{-j2\pi f 2}| = 1$$

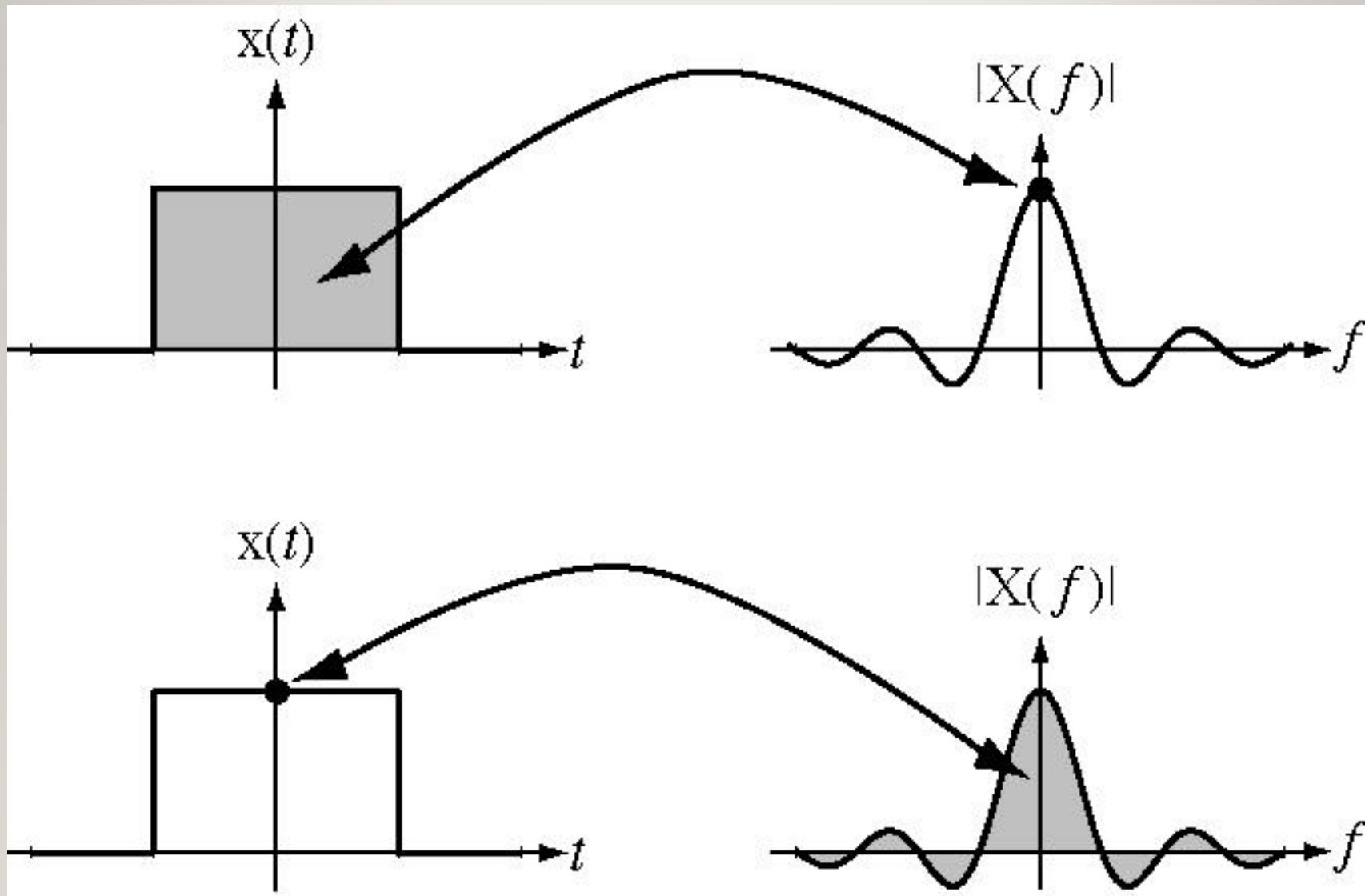
$$\blacksquare \text{ Fase} \rightarrow e^{-j2\pi f 2} = \cos 2\pi f 2 - j \sin 2\pi f 2$$

$$\blacksquare \phi = \tan^{-1} \frac{\sin 2\pi f 2}{\cos 2\pi f 2} \rightarrow \phi = -2\pi f 2$$

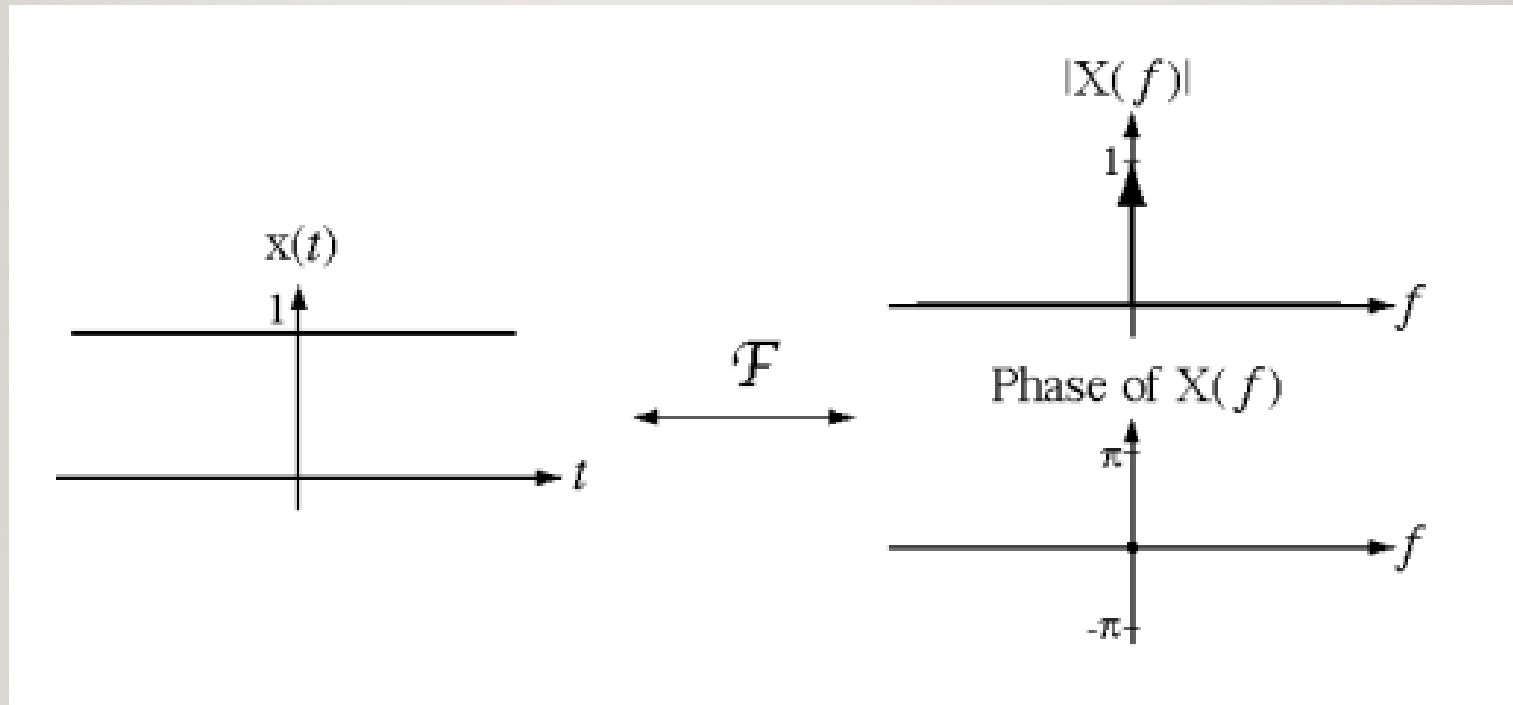




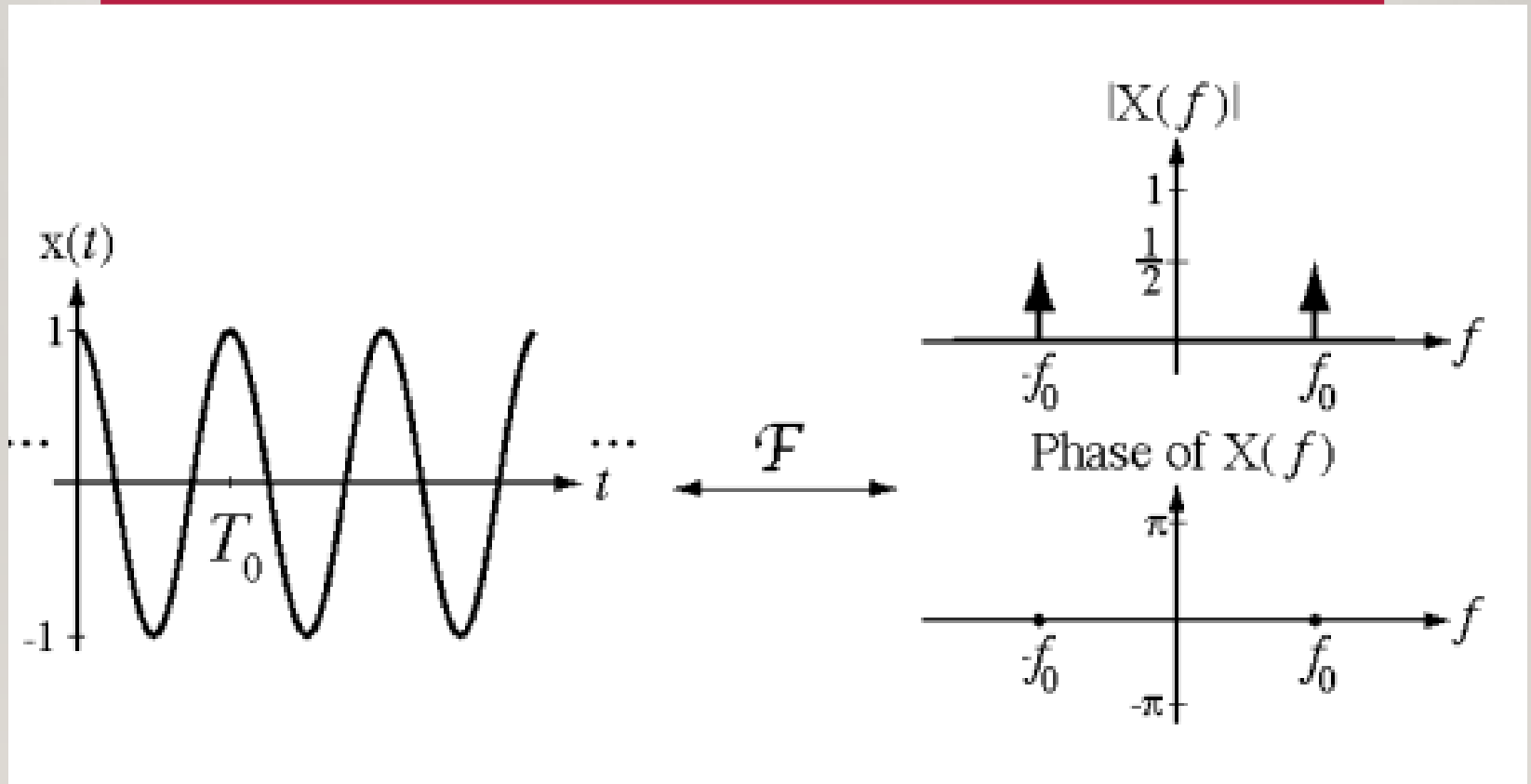




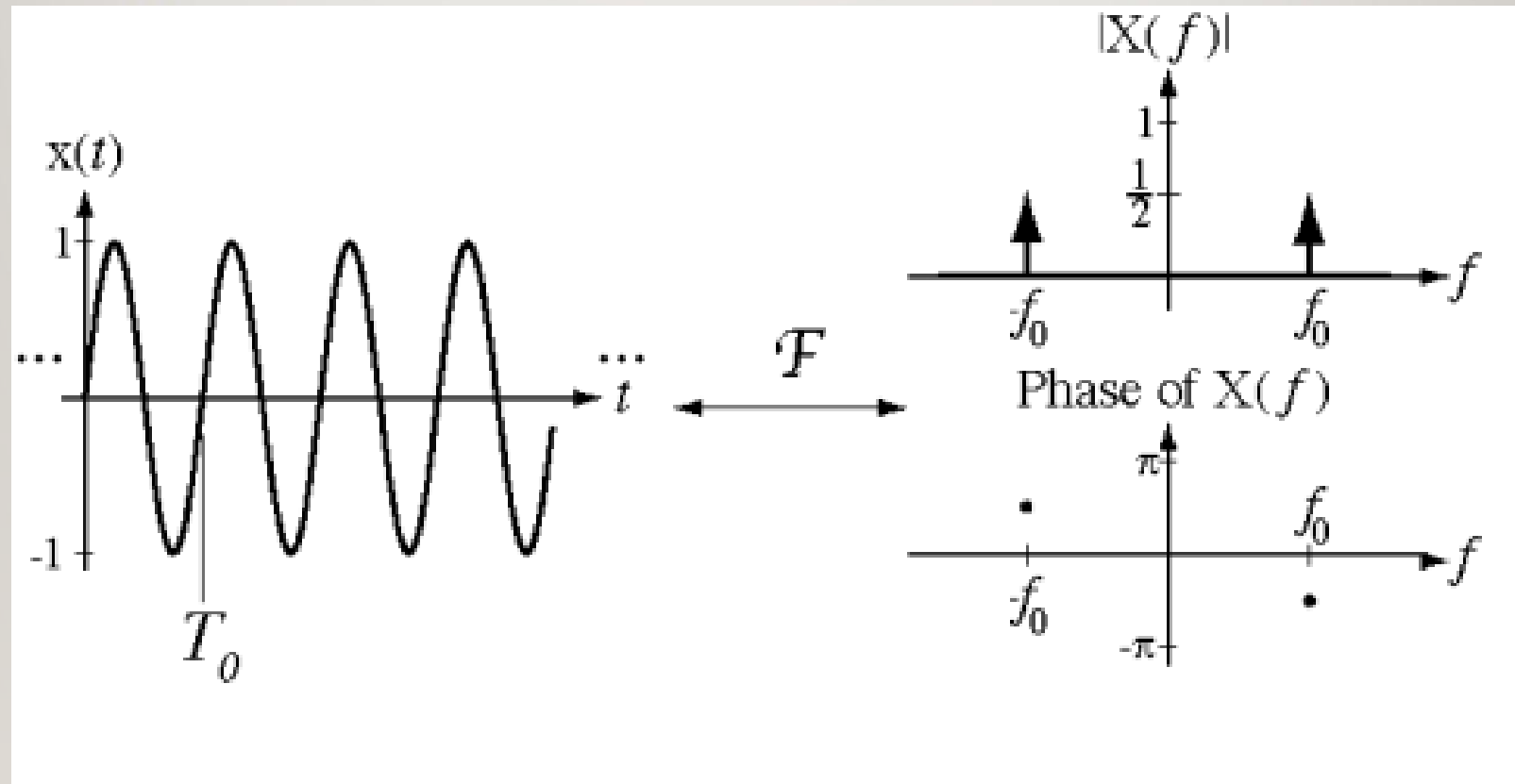
$$1 \longleftrightarrow \delta(F)$$



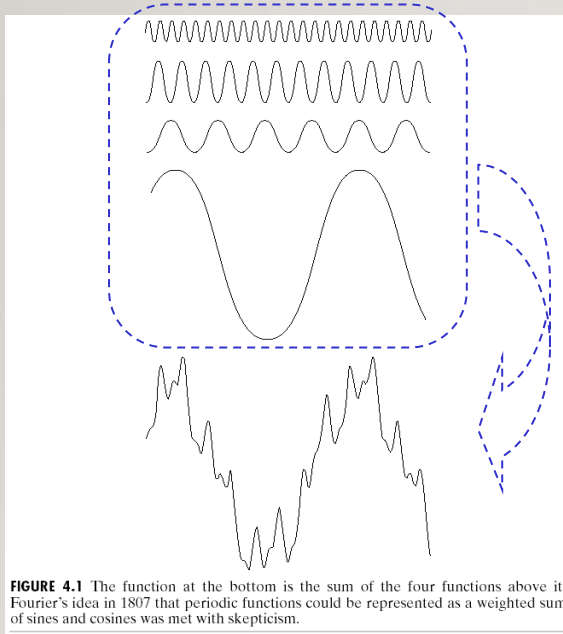
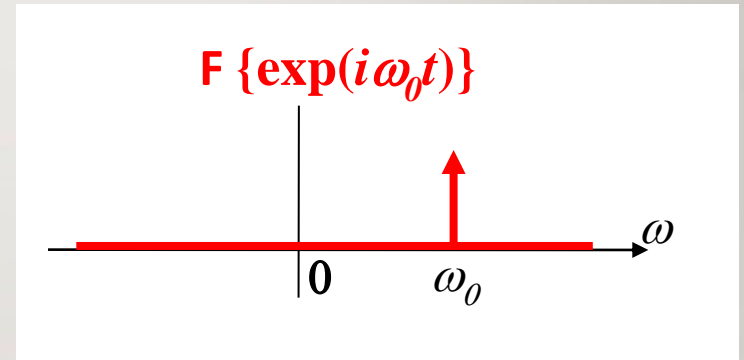
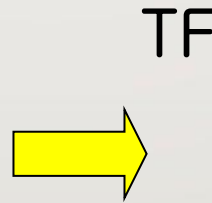
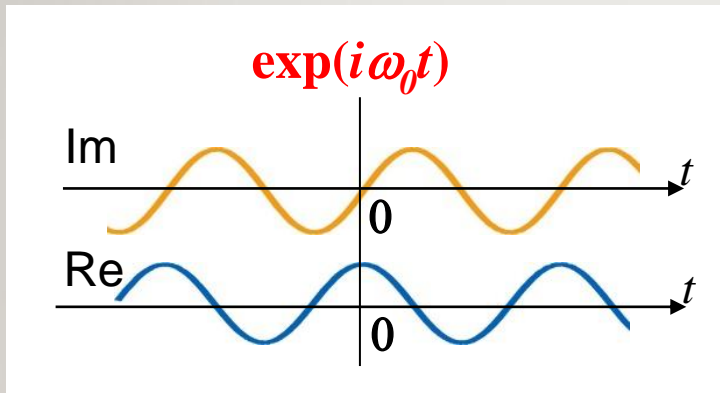
$$\cos 2\pi F_0 T \longleftrightarrow \frac{1}{2}[\delta(F-F_0) + \delta(F+F_0)]$$



$$\text{SEN } 2\pi F_0 T \longleftrightarrow \frac{1}{2}j[\delta(F+F_0)-\delta(F-F_0)]$$



En forma más general:



Suma

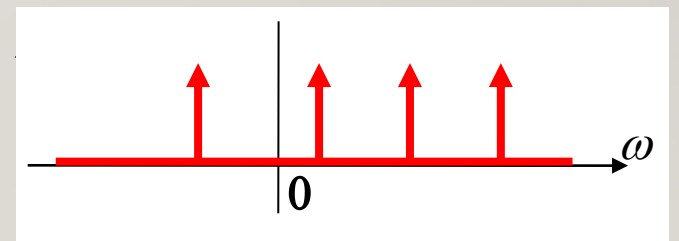
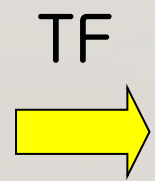


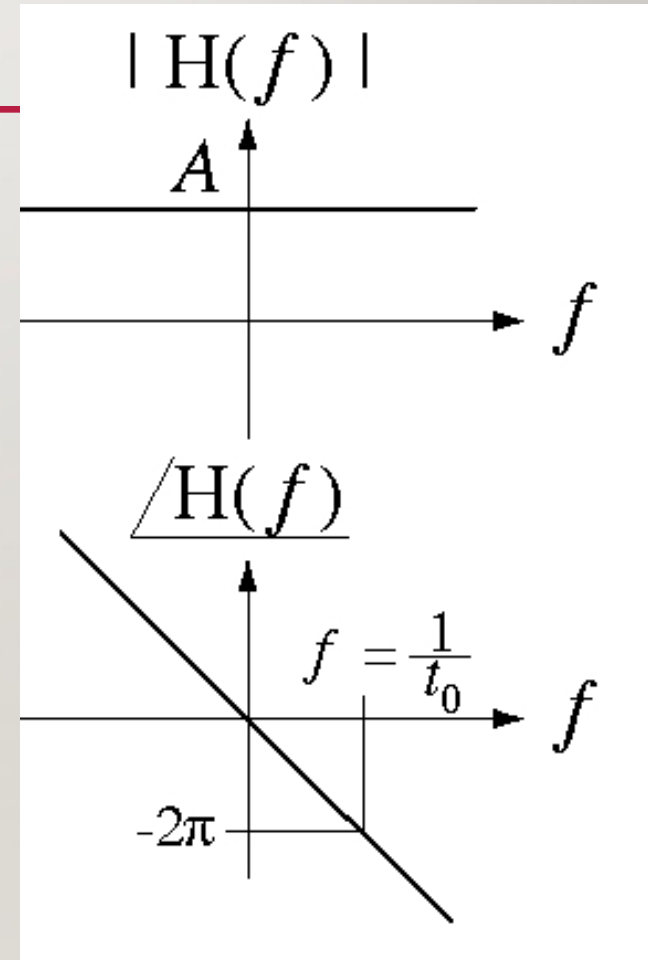
FIGURE 4.1 The function at the bottom is the sum of the four functions above it. Fourier's idea in 1807 that periodic functions could be represented as a weighted sum of sines and cosines was met with skepticism.

FILTROS IDEALES EN TC

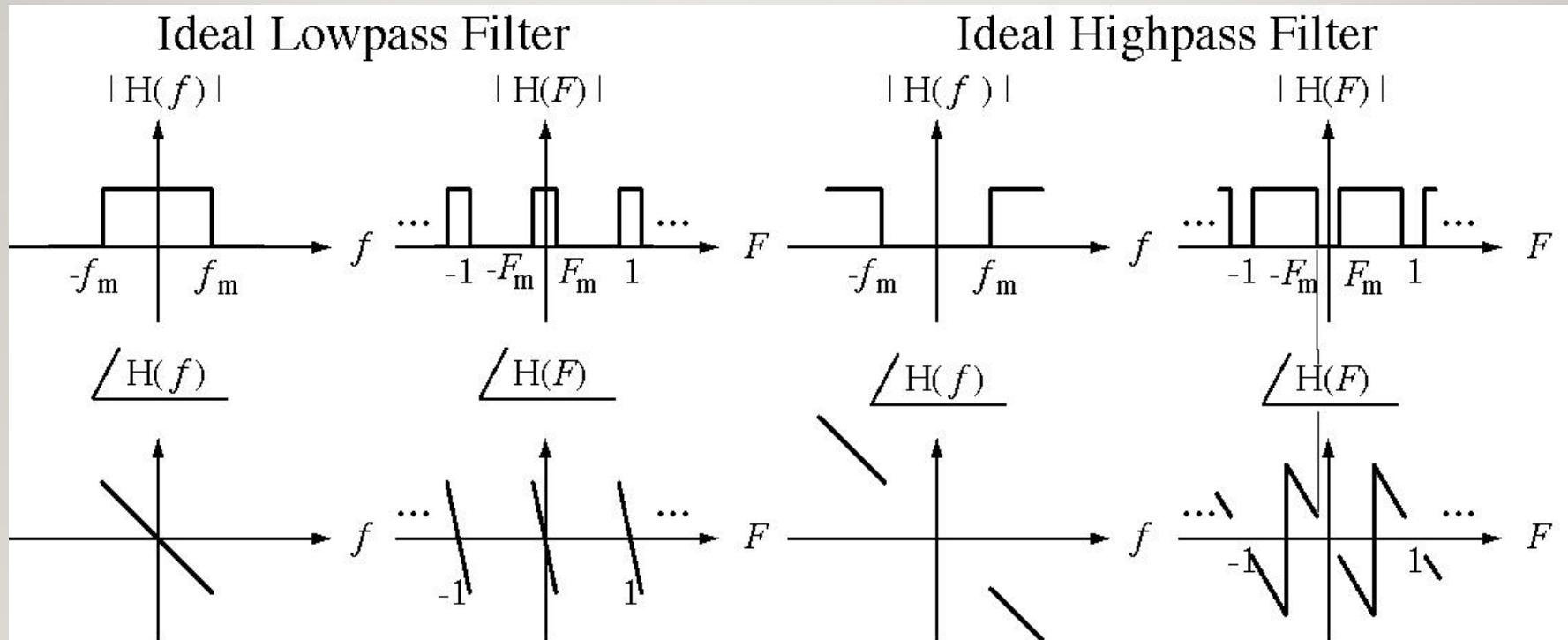
- Filtro: separa lo deseado de lo que no es deseado.
- En señales un filtro separa señales en un rango de f , de señales en otro rango de f .
- Un filtro ideal “pasa” toda la señal en su banda de paso sin distorsión y bloquea la señal fuera de su banda.

FILTRO IDEAL

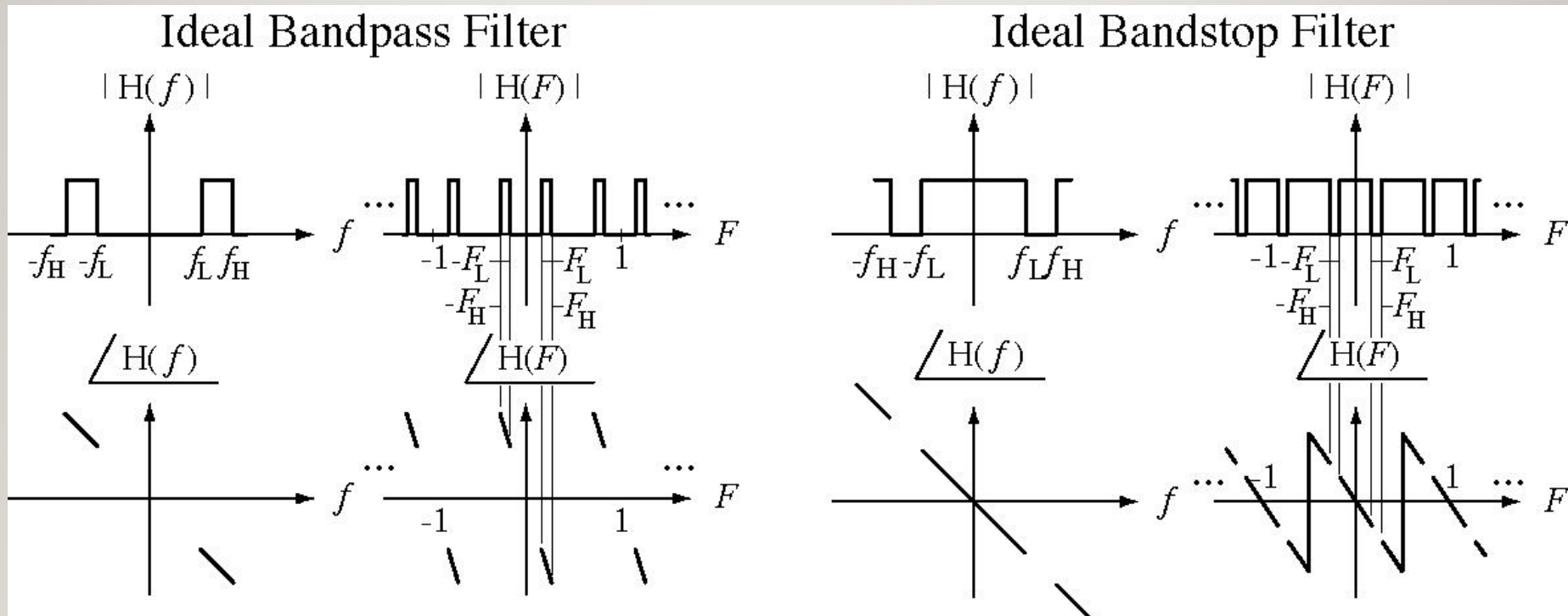
- Un filtro ideal tiene una relación de amplitudes entre entrada y salida $|H(f)|$ constante. Quiere decir que todas las componentes son igualmente atenuadas ó amplificadas.
- En cuanto a la fase tiene que ser lineal con la frecuencia. Es decir que todas las componentes son atrasadas la misma cantidad de tiempo, no la misma fase. El atraso en tiempo está dado por la pendiente de la fase (derivada).



PASA BAJOS IDEAL – PASA ALTOS IDEAL



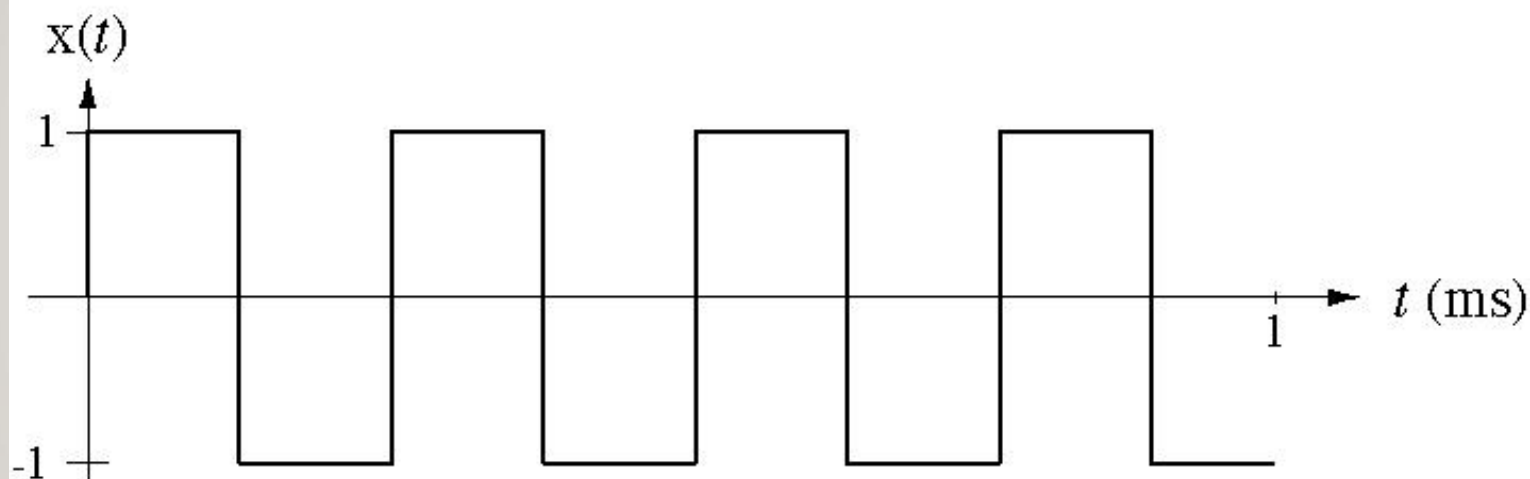
PASA BANDA IDEAL – RECHAZO DE BANDA IDEAL



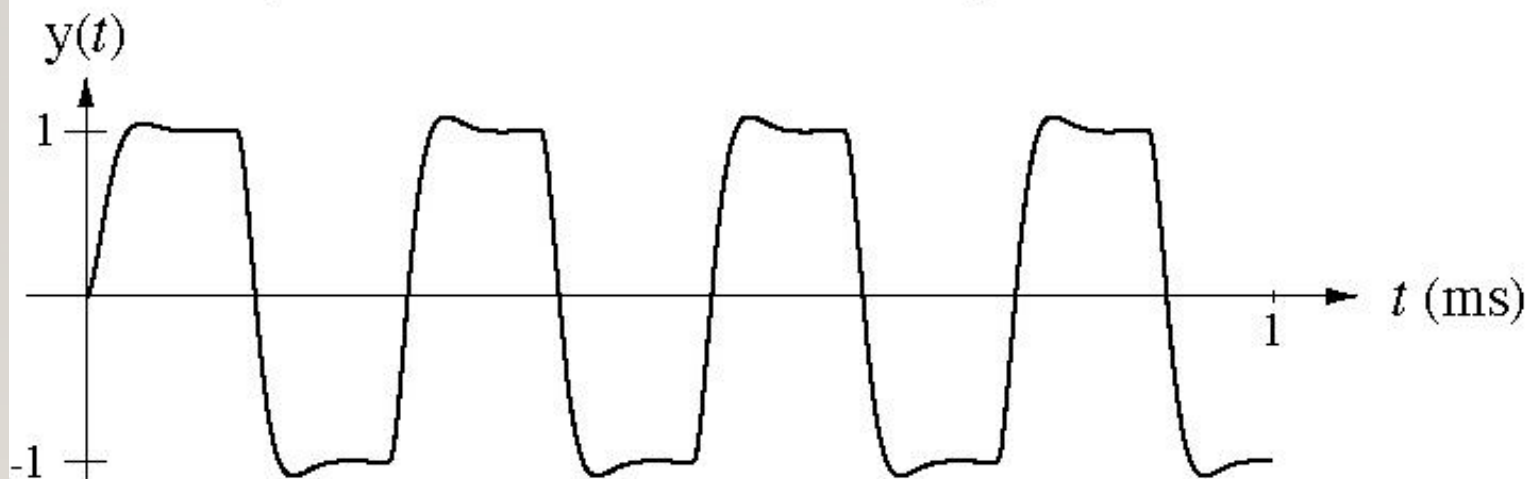
ANCHO DE BANDA

- Rango de f .
- Rango de frecuencias que deja pasar el filtro ó rango de frecuencias presentes en la señal.

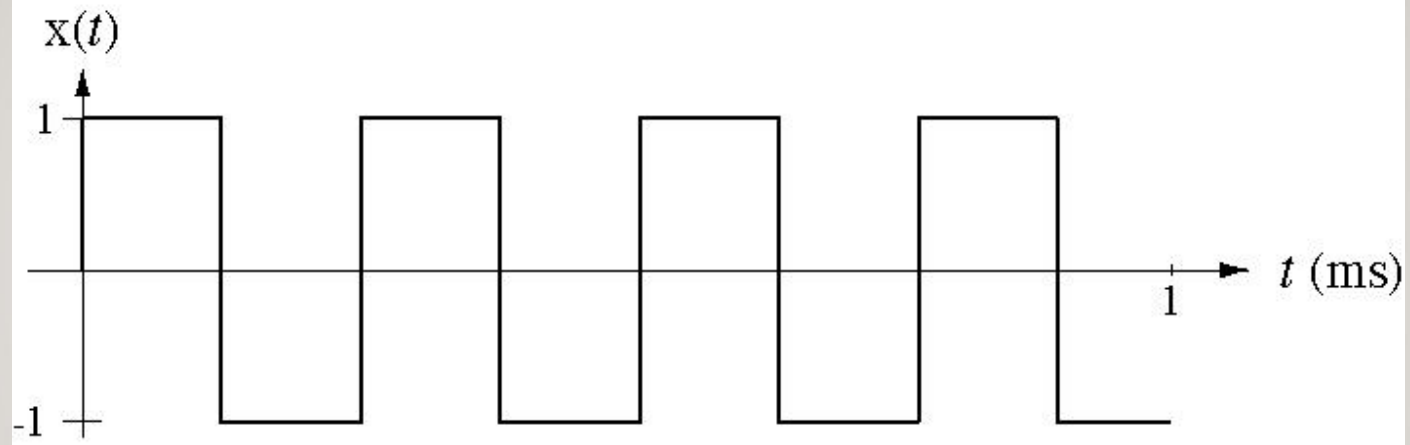
Excitation of a Causal Lowpass Filter



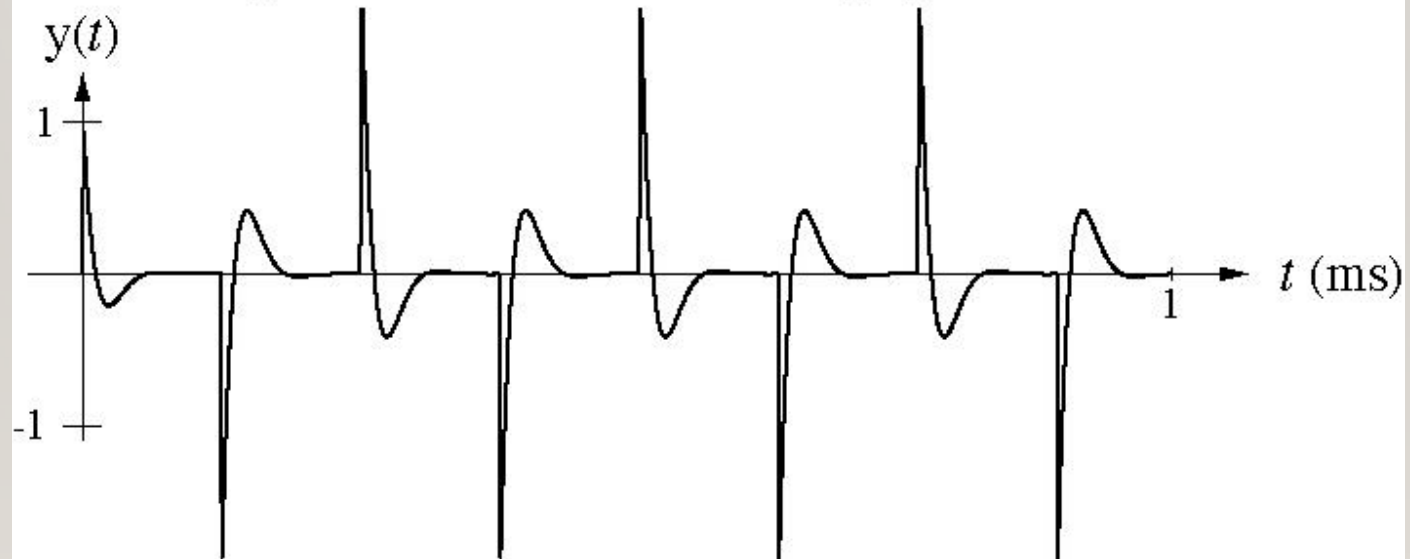
Response of a Causal Lowpass Filter



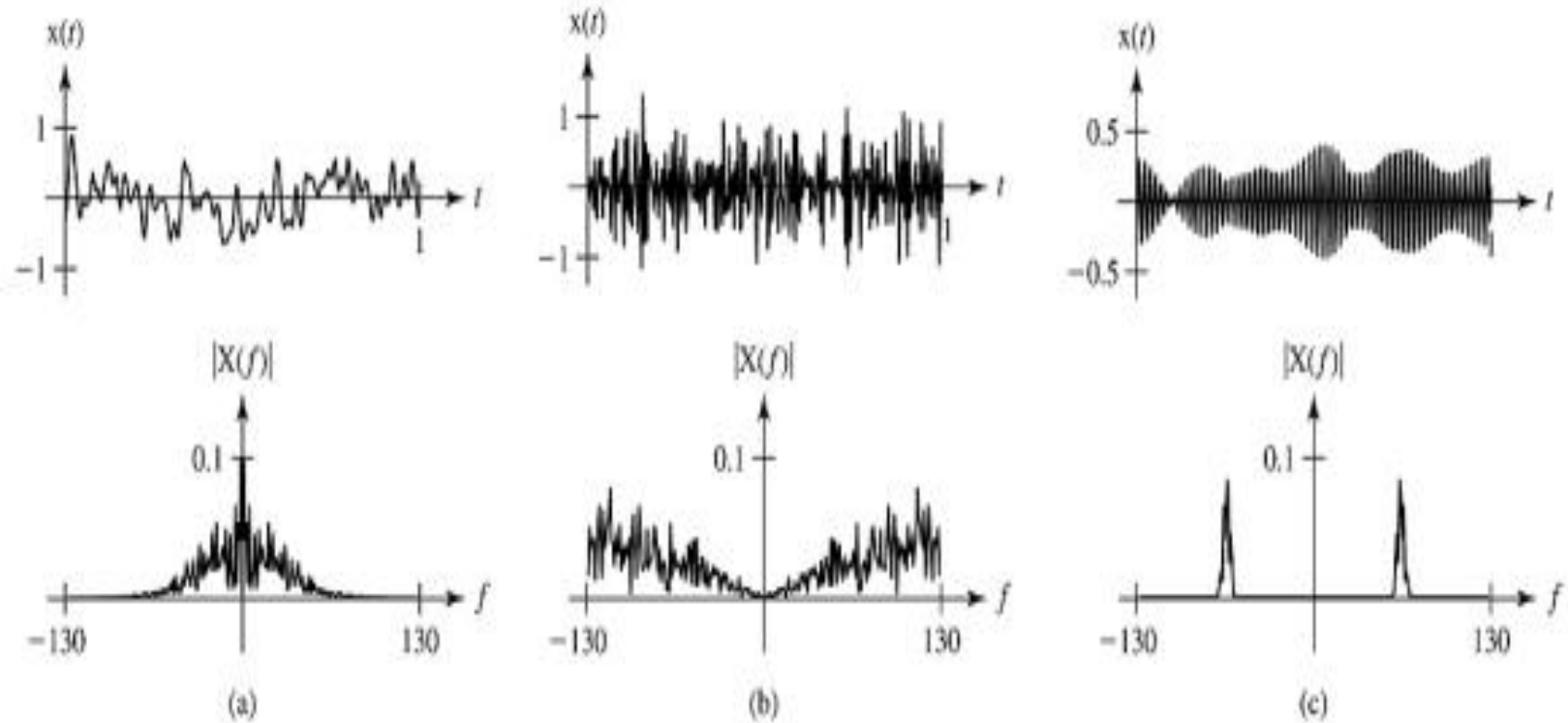
Excitation of a Causal Highpass Filter



Response of a Causal Highpass Filter



CONTENIDO EN F



TFTC APLICADA A SISTEMAS LIT

- Como vimos en clases anteriores, un sistema LIT se puede modelar mediante una ecuación diferencial con coeficientes constantes:

- $$\sum_{n=0}^N a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{n=0}^M b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n}$$

- Ya que las señales exponenciales son funciones propias de estos sistemas, entonces la respuesta permanente del sistema es la señal de entrada multiplicada por el valor propio del sistema (lo vimos con SFTC).

➤ Si hacemos la TF

$$\text{➤ } \sum_{n=0}^N a_n F\left\{\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right\} = \sum_{n=0}^M b_n F\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\}$$

➤ Aplicando la propiedad de diferenciación se obtiene

$$\text{➤ } \sum_{n=0}^N a_n (j\omega)^n Y(j\omega) = \sum_{n=0}^M b_n (j\omega)^n X(j\omega)$$

➤ Como la sumatoria afecta a $(j\omega)$

$$\text{➤ } H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{n=0}^M b_n (j\omega)^n}{\sum_{n=0}^N a_n (j\omega)^n}$$

➤ $H(j\omega)$ Representa la respuesta en frecuencia del sistema.

- O sea que si conocemos la respuesta en frecuencia de un sistema, la respuesta permanente para una entrada $x(t)$ específica será:

- $Y(j\omega) = H(j\omega) X(j\omega)$
- Recordando que $y(t) = h(t) * x(t)$
- Podemos concluir que
- $h(t) \xleftrightarrow{F} H(j\omega)$ forman un par transformado de Fourier