



Análisis de Señales-Curso 2022

Serie de Fourier en TD

Transformada de Fourier en TD

Transformada discreta de Fourier

Transformada rápida de Fourier (FFT)



Señales periódicas en TD: Series de Fourier

- Si $x(t)$ es periódica y cumple las condiciones de Dirichlet, su desarrollo en SFTC es :

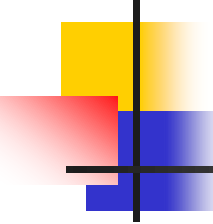
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

- Al igual que en TC una señal $x[n]$ discreta y periódica puede representarse como una superposición de exponenciales complejas discretas con frecuencias múltiplos de la fundamental.

- 
- Si la señal en TD es periódica $x[n]=x[n+N]$, su representación mediante la SF es:

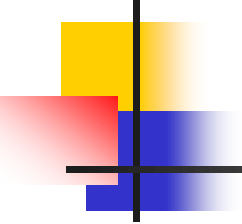
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Omega_0 n}$$

- Donde $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ es la frecuencia “digital” fundamental de la señal periódica, y la frecuencia de la componente k-ésima es $k\Omega_0$

- 
- Ahora podemos preguntarnos: ¿cuántos términos deben considerarse en la suma para el caso de una secuencia discreta periódica de período N?
 - Recordando la propiedad de las exponenciales complejas discretas

$$e^{j(N+k)\Omega_0 n} = e^{jN\Omega_0 n} e^{jk\Omega_0 n} = e^{jN\frac{2\pi}{N}n} e^{jk\Omega_0 n} = e^{jk\Omega_0 n}$$

- Como habíamos visto antes exponenciales complejas con $f \neq$ no son todas diferentes como ocurría en TC. Sólo hay N exponenciales complejas distintas (empiezan a repetirse).

- 
-
- En consecuencia se puede escribir la SF de una señal periódica discreta :

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} C_k e^{j\Omega kn}$$



SFTC



SFTD

- En TC:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_0 t}$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt$$

- Para discretizar $x(t)$ tomamos N muestras durante un período a intervalos $T_s \longrightarrow N \cdot T_s = T$
- Los coeficientes serán :

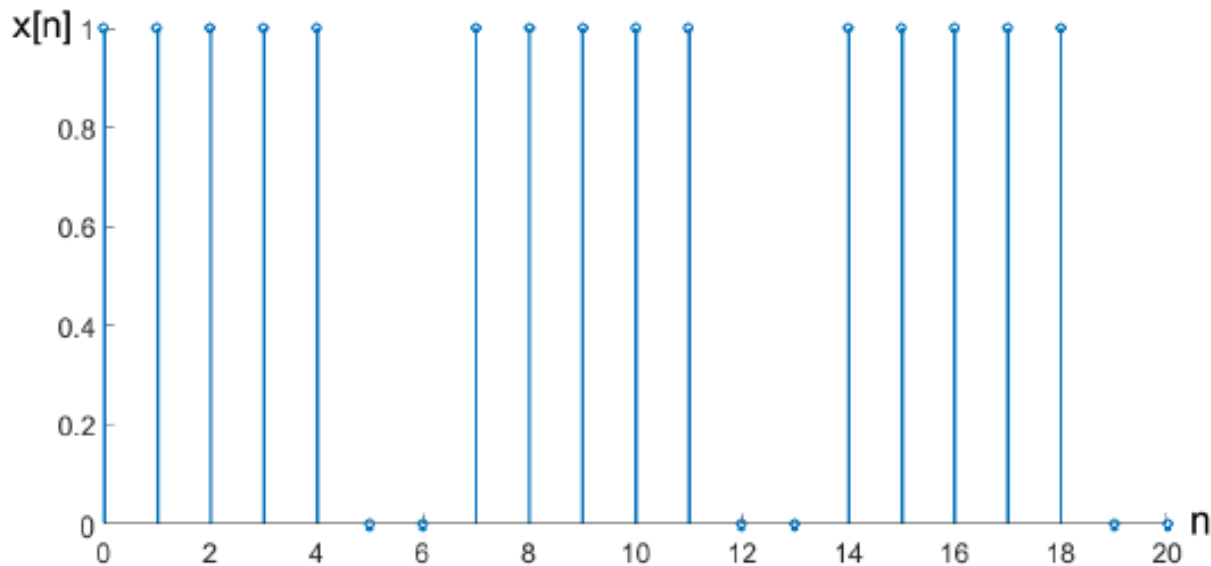
$$C_k = \frac{1}{N T_s} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi k f_0 n T_s} \cdot T_s = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi k f_0 n T_s}$$

- 
-
- La representación en SFTD será :

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} C_k e^{j\Omega kn}$$

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega n}$$

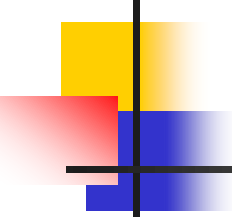
Ejemplo



$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{7} \sum_{n=0}^6 x[n] e^{-jk(2\pi/7)n}$$

$$a_k = \frac{1}{7} \sum_{n=0}^4 e^{-jk(2\pi/7)n}$$

*La función tiene valores $\neq 0$
para $0 \leq n \leq 4$*

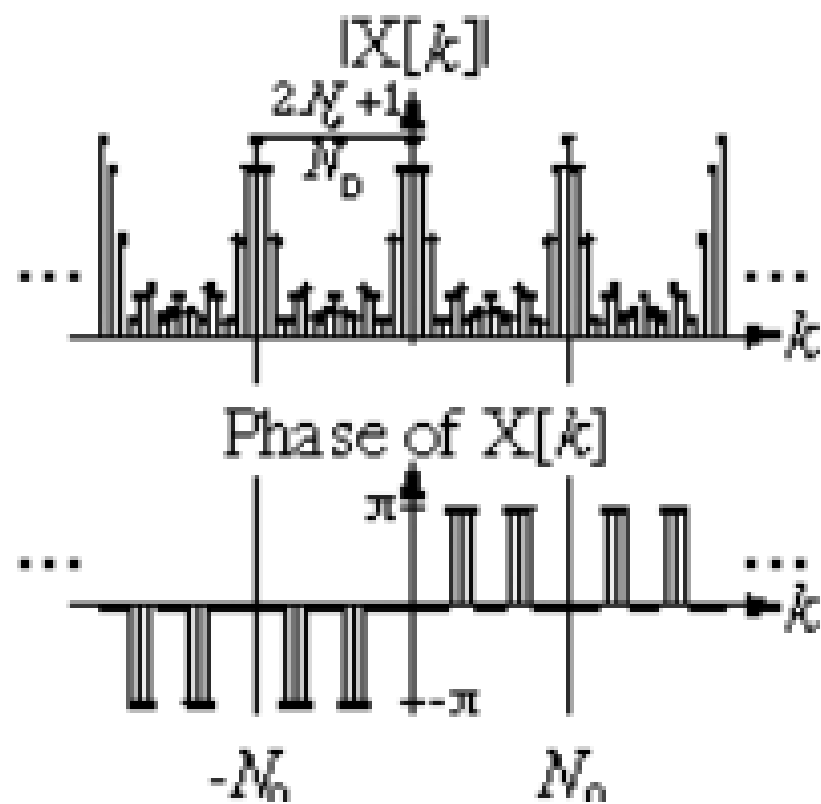
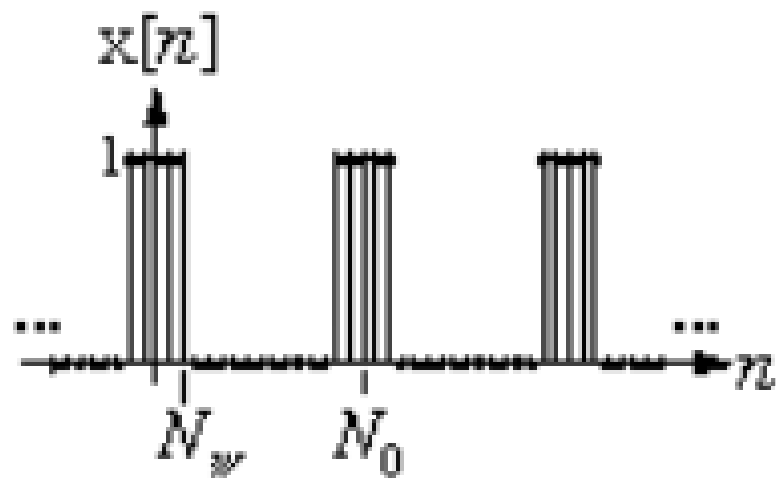
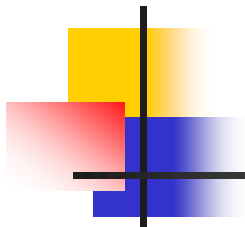


$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha}$$

$$a_k = \frac{1}{7} \frac{(1 - e^{-jk(2\pi/7)5})}{(1 - e^{-jk(2\pi/7)})} = \frac{1}{7} \frac{(e^{jk5\pi/7} - e^{-jk5\pi/7}) e^{-jk5\pi/7}}{(e^{jk\pi/7} - e^{-jk\pi/7}) e^{-jk\pi/7}}$$

$$a_k = \frac{1}{7} e^{-jk4\pi/7} \frac{\sin(k5\pi/7)}{\sin(k\pi/7)}$$

$$x[n] = \frac{1}{7} \sum_{k=0}^6 \frac{\sin(k5\pi/7)}{\sin(k\pi/7)} e^{jk2\pi(n-2)/7}$$

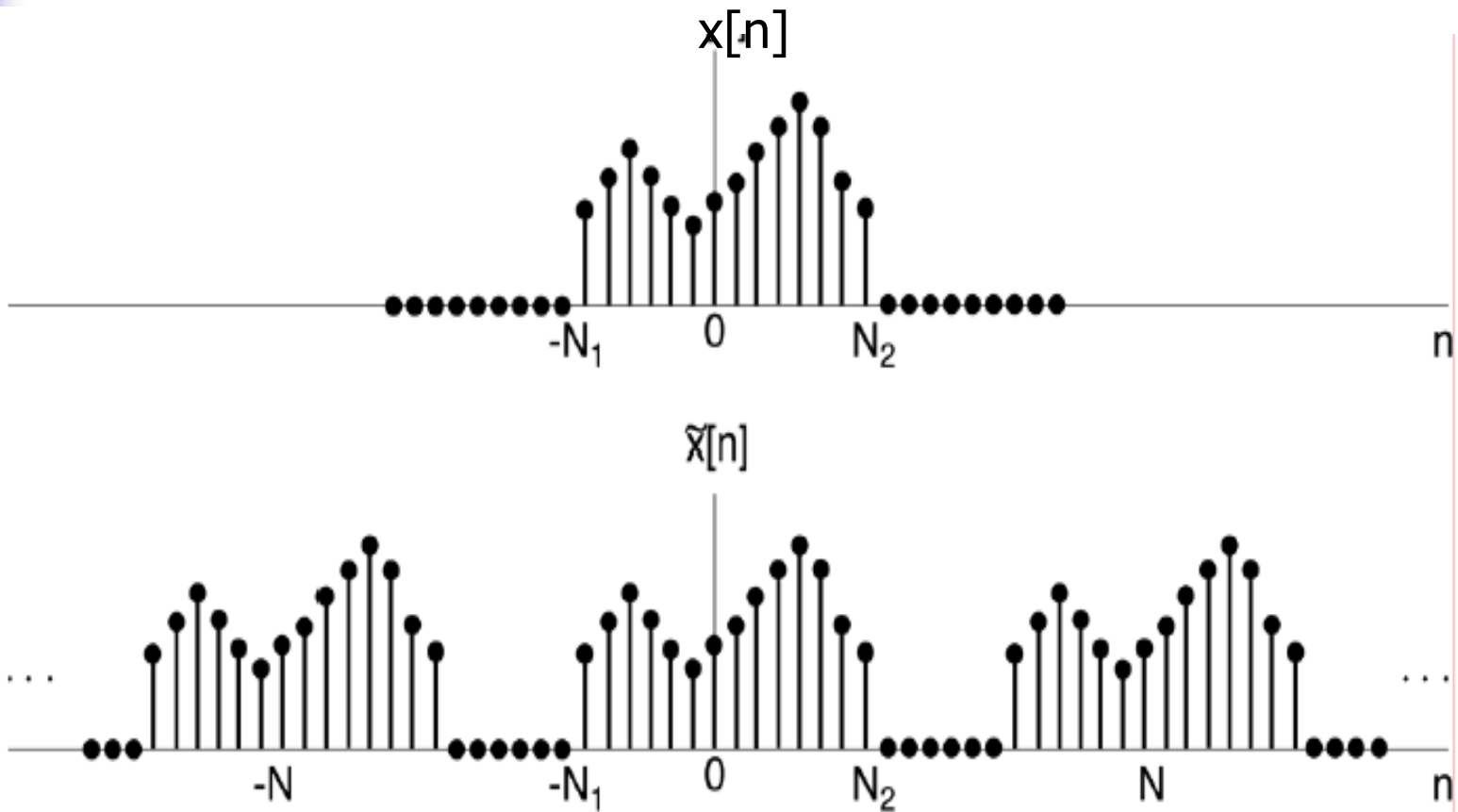




TFTD

- Derivación : igual que en TC
- $x[n]$ – aperiódica de duración finita
- $\tilde{x}[n]$ – periódica de período N
- $\tilde{x}[n] = x[n]$ en N


Derivación (continuación)





Derivación (continuación)

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} C_k e^{jk\Omega_0 n} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$


*Escribimos la SFTD
para la señal periódica*

Recordando $x[n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \{\tilde{x}[n]\}$

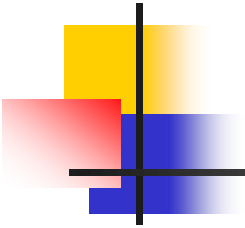


Si definimos $X(e^{j\Omega})$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

$$C_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\Omega_0})$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} X(e^{jk\Omega_0}) e^{jk\Omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} X(e^{jk\Omega_0}) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0$$



- para $N \longrightarrow \infty$
- $\tilde{x}[n] \longrightarrow x[n]$
- $\Omega_0 \longrightarrow 0$
- $\Sigma \Omega_0 \longrightarrow \int d\Omega$



Par TF en TD

También llamada espectro de $x[n]$ ya que proporciona información de amplitud y fase en frecuencia de las exponenciales complejas que componen $x[n]$.

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\Omega})$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

TFTD – Ecuación de análisis

TFITD – Ecuación de síntesis

Expresa que $x[n]$ es una sumatoria continua de exponenciales complejas calculadas en el intervalo 2π



Convergencia

Ecuación de síntesis: ninguna, ya que se integra sobre un intervalo finito

Ecuación de análisis: son necesarias condiciones análogas a la TF en tiempo continuo, por ejemplo:

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty \right. \quad \text{— Energía finita}$$

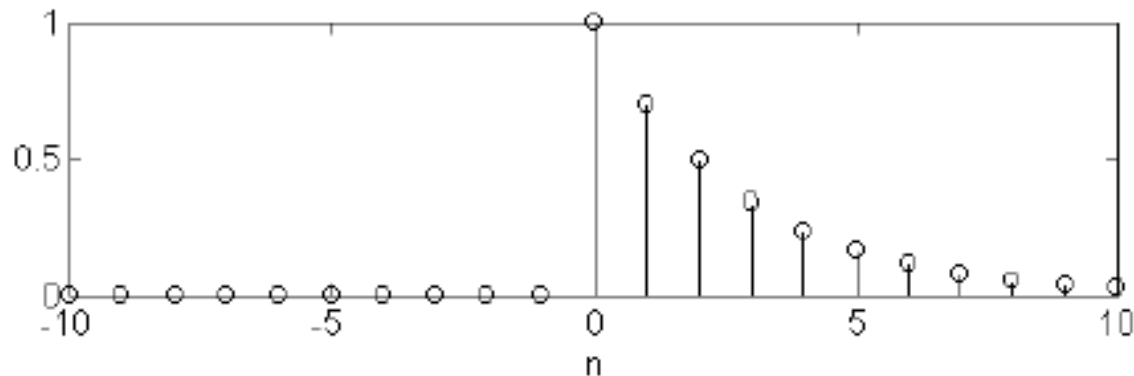
OR

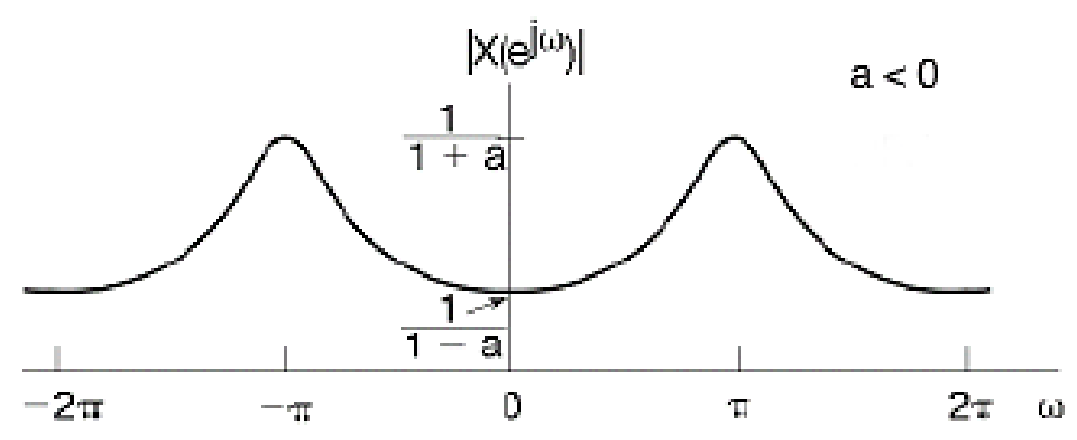
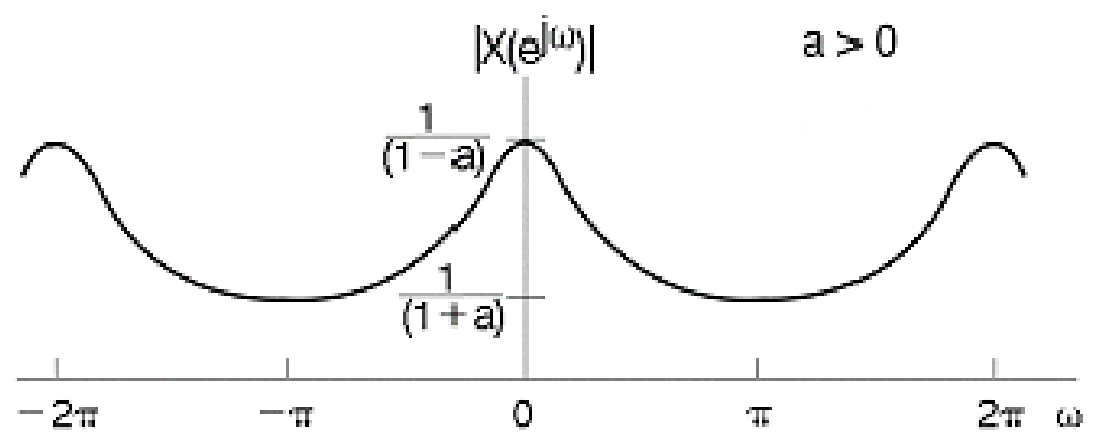
$$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \right. \quad \text{— Completamente sumable}$$

Ejemplo

$$x[n] = a^n u[n] \quad |a| < 1$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$



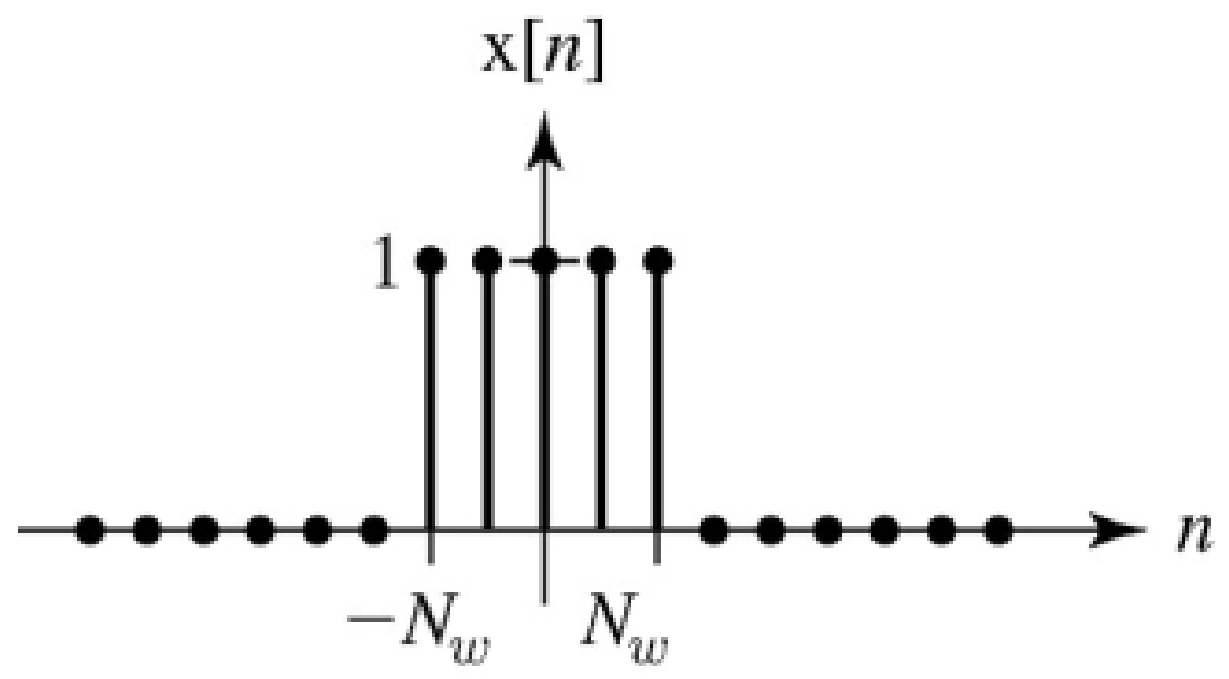
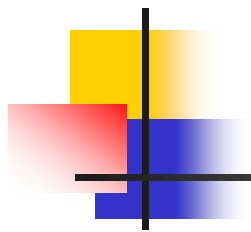


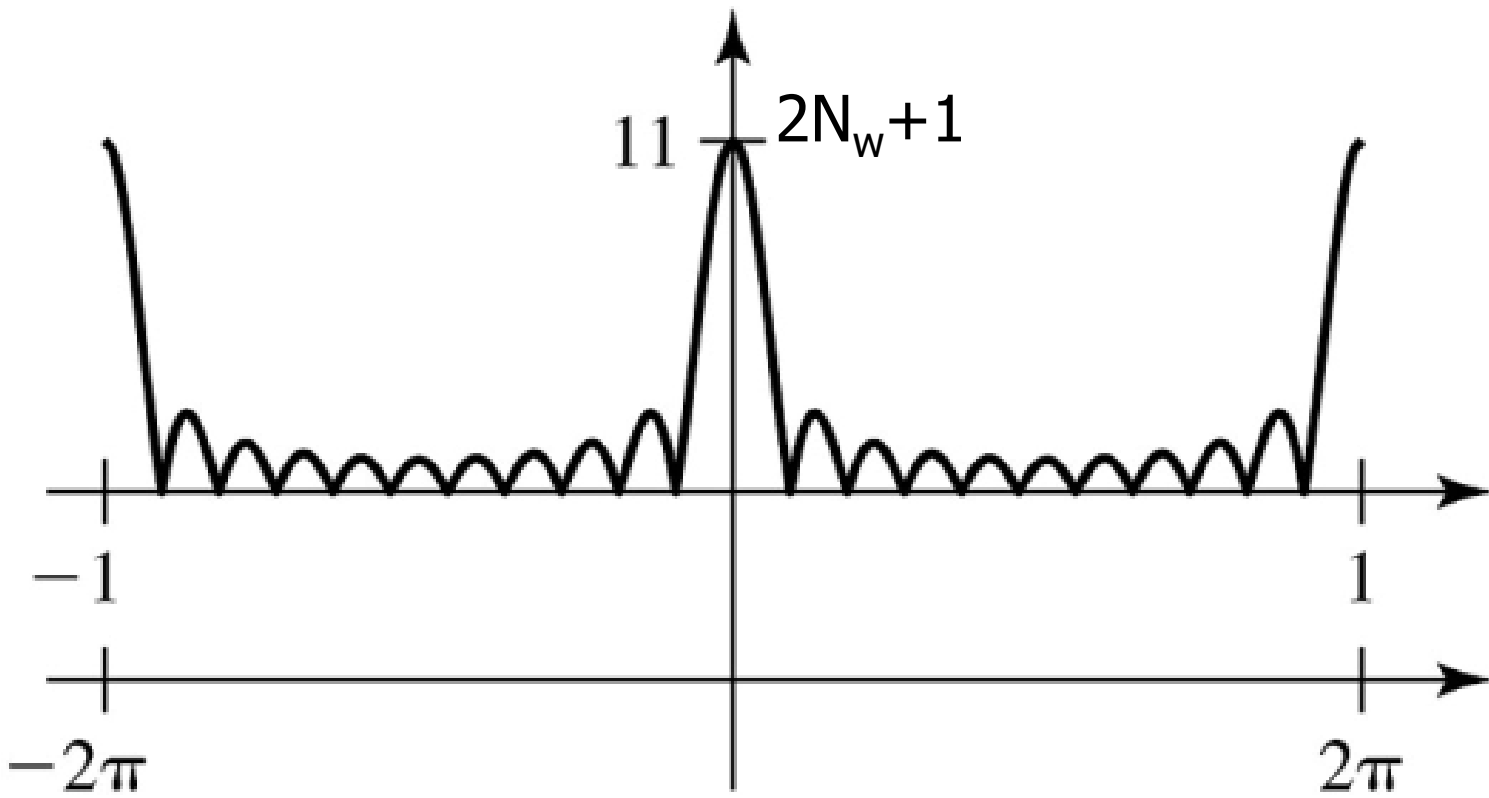


Ejemplo

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_w \\ 0 & |n| > N_w \end{cases}$$

$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-N_w}^{N_w} e^{-jwn} = \frac{\text{sen}w(N_w + 1/2)}{\text{sen}(w/2)}$$







Propiedades de la TFTD

- Periodicidad: la TFTD siempre es periódica en w con período 2π .

$$X(e^{j(w+2\pi)}) = X(e^{jw})$$



- Linealidad

$$x_1[n] \xleftrightarrow{F} X_1(e^{j\omega})$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_2(e^{j\omega})$$

$$a x_1[n] + b x_2[n] \xleftrightarrow{F} a X_1(e^{j\omega}) + b X_2(e^{j\omega})$$

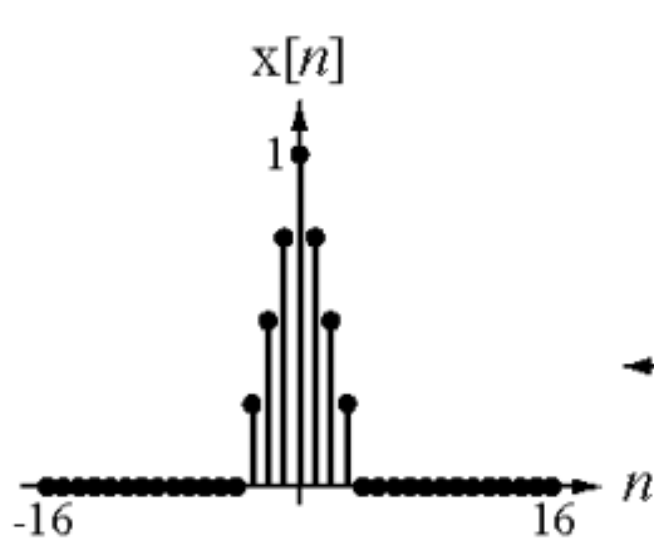


- Desplazamiento en t y f

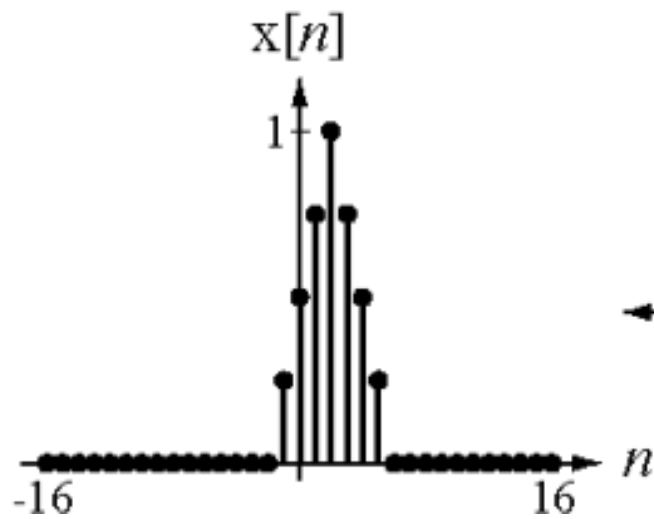
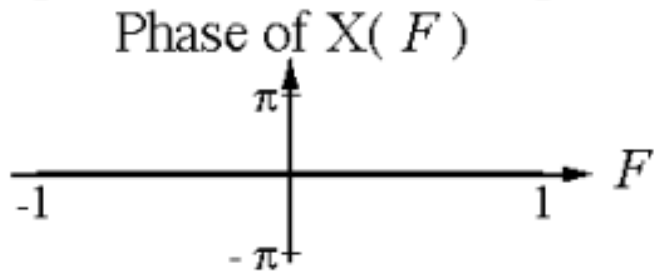
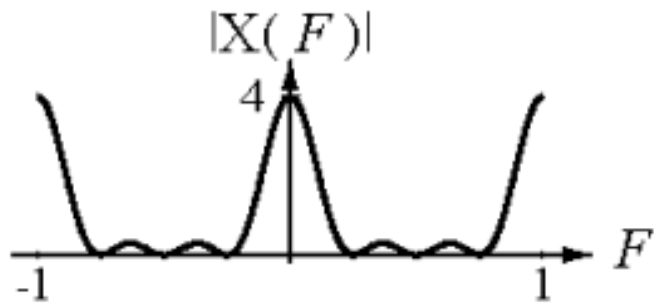
$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

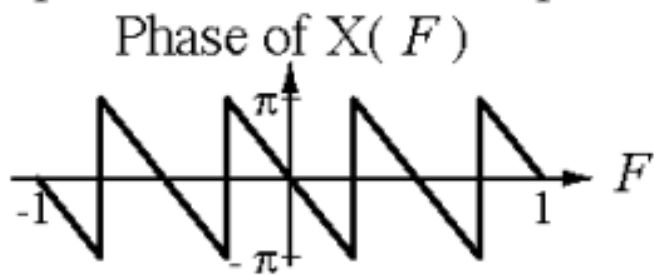
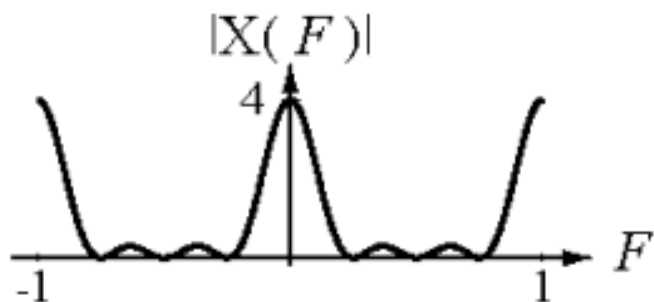
$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$



\mathcal{F}



\mathcal{F}







Frecuencia continua y discreta

- Para tc $x_a(t) = A \cos(\omega t)$ $-\infty < t < \infty$
- $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$

- Para td $x[n] = A \cos[\Omega n]$ $-\infty < n < \infty$
- $\Omega = 2\pi F = 2\pi/N$





Muestreo de señales analógicas

- Si muestreamos al cos cada T_m
-  $x(n) = x_a(nT_m) = A \cos(2\pi f n T_m)$
- Comparando $x(n) = A \cos(2\pi F n)$
-  $F = f T_m = f / f_m$
- Se denomina frecuencia normalizada ó relativa.



Recordando

- Las sinusoides en td cuyas f están separadas por un múltiplo entero de 2π son idénticas. Ej.
- $\cos[(\omega + 2\pi)n] = \cos(\omega n + 2\pi n) =$
  $\cos(\omega n)$
- Por tanto existen señales discretas iguales con f distintas. Es decir cualquier secuencia con $|\Omega| > \pi$ tiene una secuencia idéntica en $|\Omega| < \pi$ 



Resumiendo

- Los rangos analógicos son
- $-\infty < f < \infty$ $-\infty < W < \infty$

- Los rangos digitales son
- $-1/2 < F < 1/2$ $-\pi < \Omega < \pi$

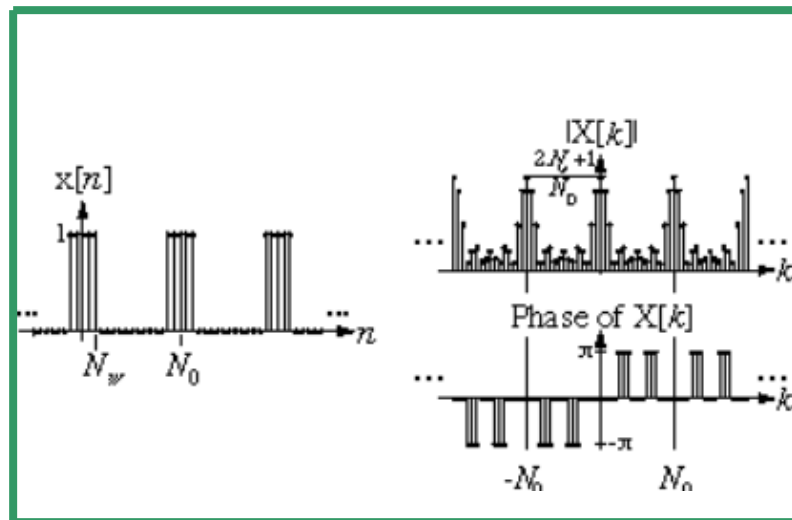
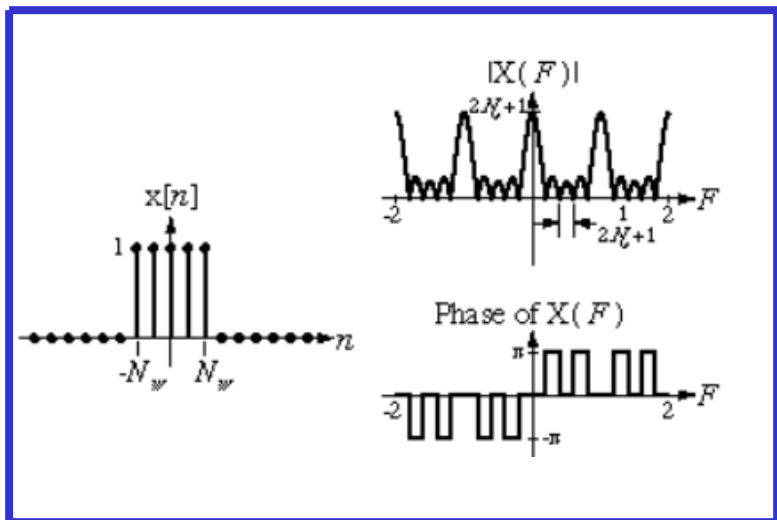
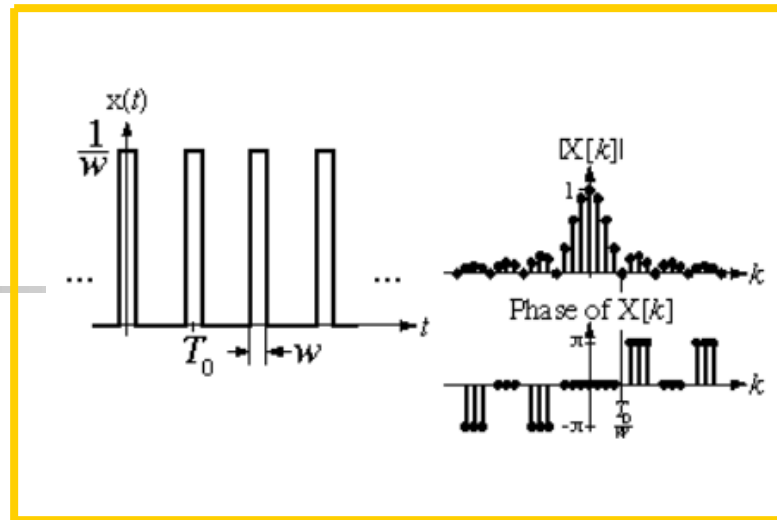
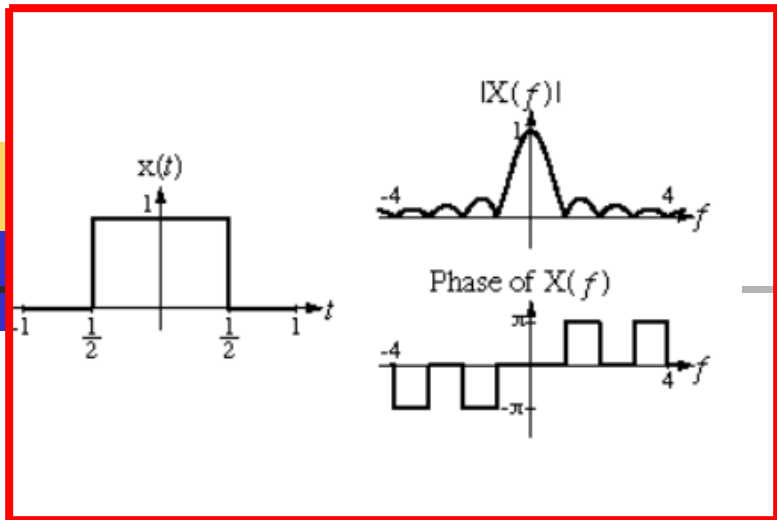


Los 4 métodos de Fourier

Frec. discreta Frec. continua

TC	SFTC	TFTC
TD	SFTD	TFTD

Dominio de tiempo	Periódica	No periódica	
Continua	<p data-bbox="511 201 788 229">FS : Serie de Fourier</p> $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t}$ $X[k] = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$	<p data-bbox="1110 201 1503 229">FT: Transformada de Fourier</p> $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	No periódica
Discreta	<p data-bbox="376 665 923 694">DTFS: Serie de Fourier en tiempo discreto</p> $x[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} X[k] e^{jk\hat{\omega}_0 n}$ $X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} x[n] e^{-jk\hat{\omega}_0 n}$	<p data-bbox="1020 644 1593 708">DTFT: Transformada de Fourier en tiempo discreto</p> $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\hat{\omega} n} d\omega$ $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\hat{\omega} n}$	Periódica
	Discreta	Continua	Dominio de la frecuencia





Dualidad : SFTC y TFTD

- Tenemos una señal periódica continua $x_p(t)$. Mediante las SF (obtengo los coeficientes) transformamos esta señal periódica continua en una función aperiódica y discreta (los coeficientes espectrales separados $1/T$).
- De forma dual, podemos intercambiar tiempo y frecuencia, y tenemos una señal aperiódica discreta en el tiempo (muestreada a $1/f_m$) y la transformamos en una señal periódica, (período f_m) continua en f mediante TFTD.



Transformada de Fourier Discreta (TFD)

- Sin embargo a la hora de realizar operaciones tenemos los mismos problemas que en las SF ya que seguimos tratando con señales contínuas ó con serie de datos de longitud infinita. La "electrónica" nos obliga a trabajar con un número finito de datos discretos que además tienen una precisión finita.
- Se trata de conseguir discretizar las variables contínuas y de limitar el número de muestras en los dos dominios : temporal y frecuencial.



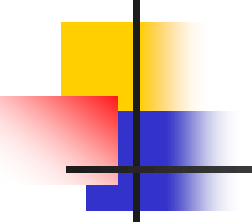
De la TFTD \Rightarrow TFD

- Tenemos una señal $x[n]$ limitada a N muestras con un período de muestreo t_s
- Se define la TFTD :

$$X_p(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi n f t_s}$$

- $X_p(f)$ es periódica con período t_s .
Muestreamos la señal N veces sobre un período por tanto $X_T[k]$ (sustituir f por k/Nt_s)

$$X_T[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi n k t_s / N t_s} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi n k / N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$



➤ Podemos interpretar los resultados de la TFD de una secuencia $x[n]$ desde dos puntos de vista :

- Como coeficientes espectrales (SF) de una señal periódica discreta cuyos muestreos coinciden con la secuencia $x[n]$.
- Como el espectro de una señal aperiódica discreta cuyos muestreos corresponden a la secuencia $x[n]$.
- La TFD es una aproximación al espectro de la señal analógica original.



¿Cómo hacer TFD?

- Elegir el intervalo de muestreo t_s , de tal manera que se cumpla el T. de Muestreo.
- Crear una expansión periódica $x_p(t)$ de $x(t)$ con período D (tiempo total de muestreo).
- Tomar N muestras de $x_p(t)$ y calcular TFD.

Resumen de Series y Transformadas de Fourier

□ Series de Fourier

- ◆ Señal Continua Periódica (periodo T), Espectro Discreto Aperiódico (intervalo de discretización $1/T$)

□ Transformada de Fourier

- ◆ Señal Continua Aperiódica, Espectro Continuo Aperiódico.

□ Transformada de Fourier Discreta en el Tiempo

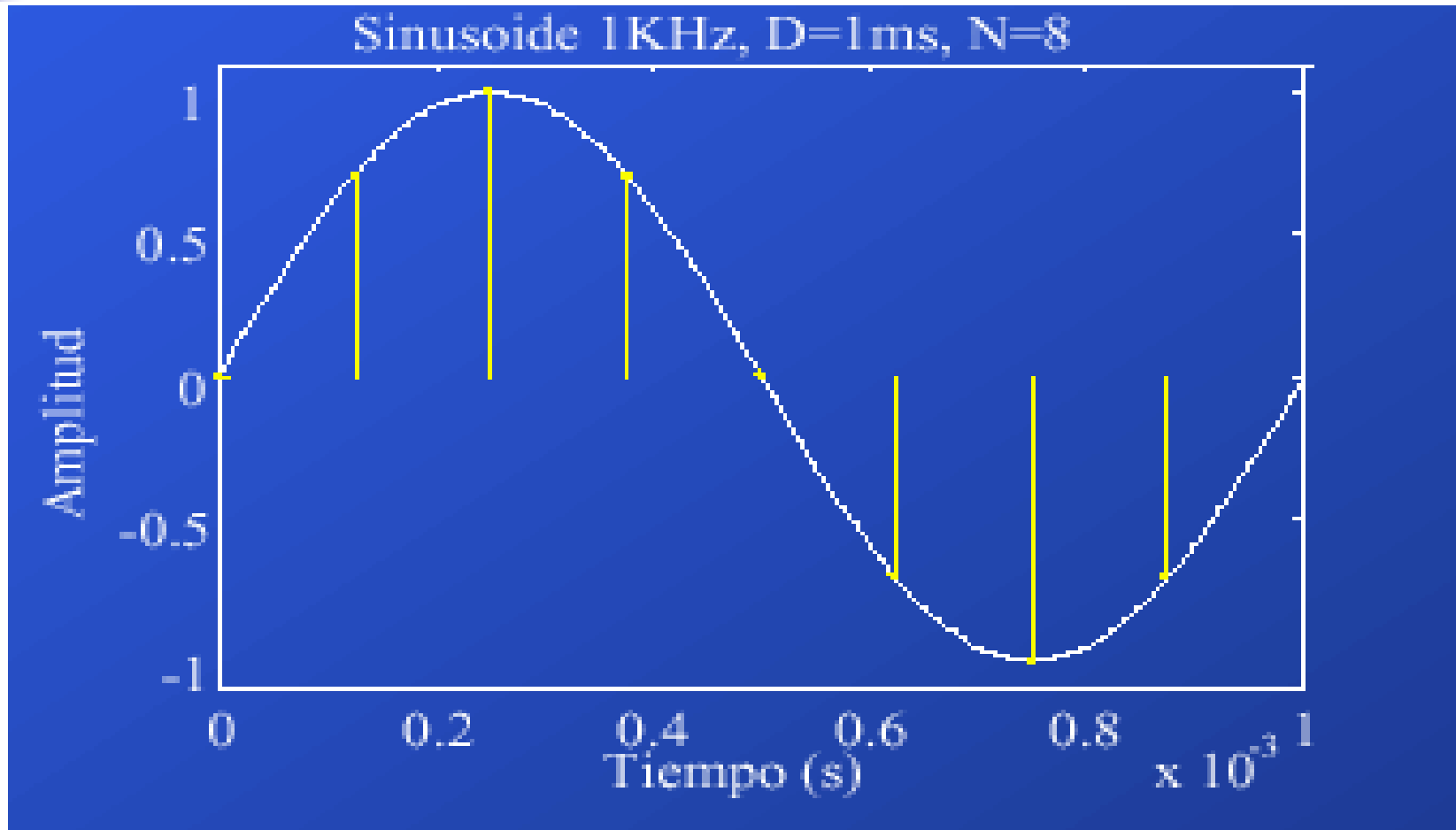
- ◆ Señal Discreta Aperiódica (intervalo de discretización t_s), Espectro Continuo Periódico (periodo $1/t_s$)

□ Transformada Discreta de Fourier

- ◆ Señal Discreta Periódica (intervalo de discretización t_s , periodo T), Espectro Discreto (intervalo de discretización $1/T$)

Ej.

$$X(t) = \sin(2\pi f_0 t); \quad f_0 = 1\text{kHz} \quad D = 1\text{mSeg} \quad N = 8$$



- $x[n]=\{0, 0.707, 1, 0.707, 0, -0.707, -1, -0.707\}$

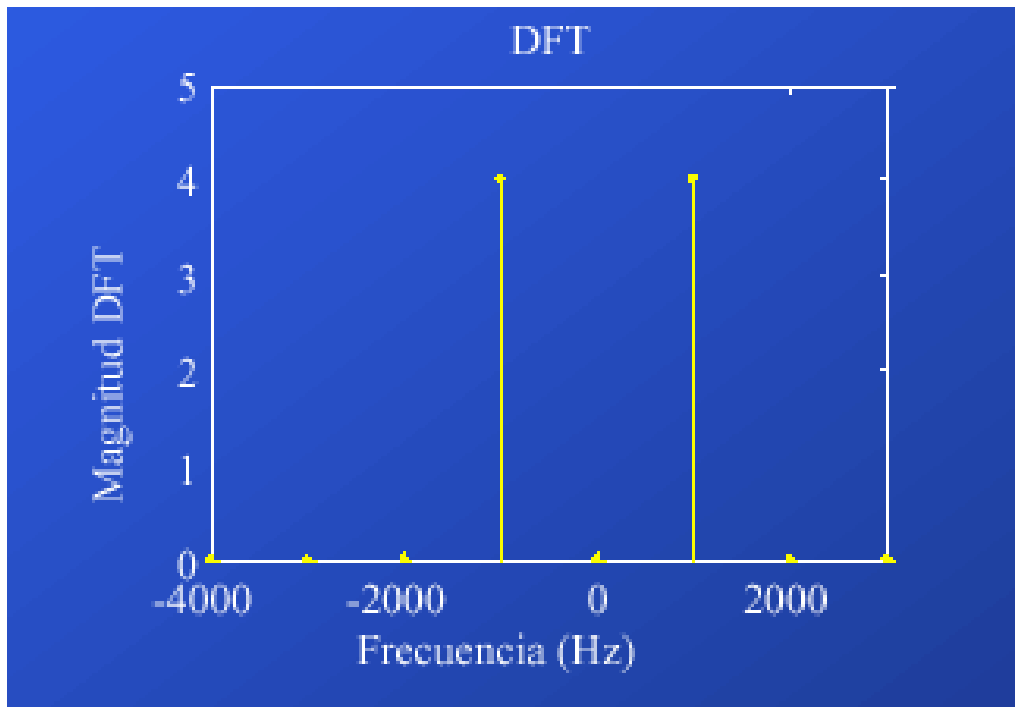
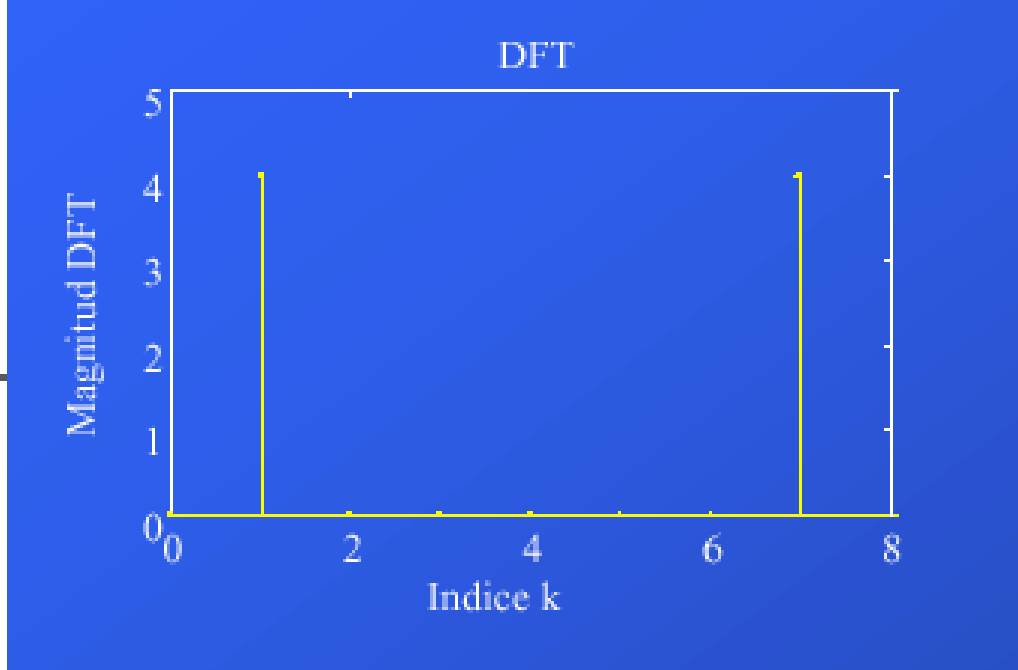
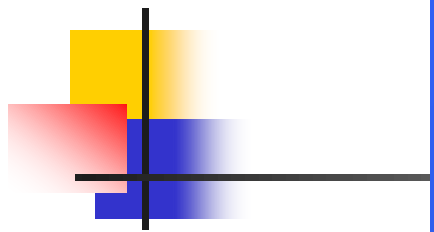
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi(nk/N)}$$

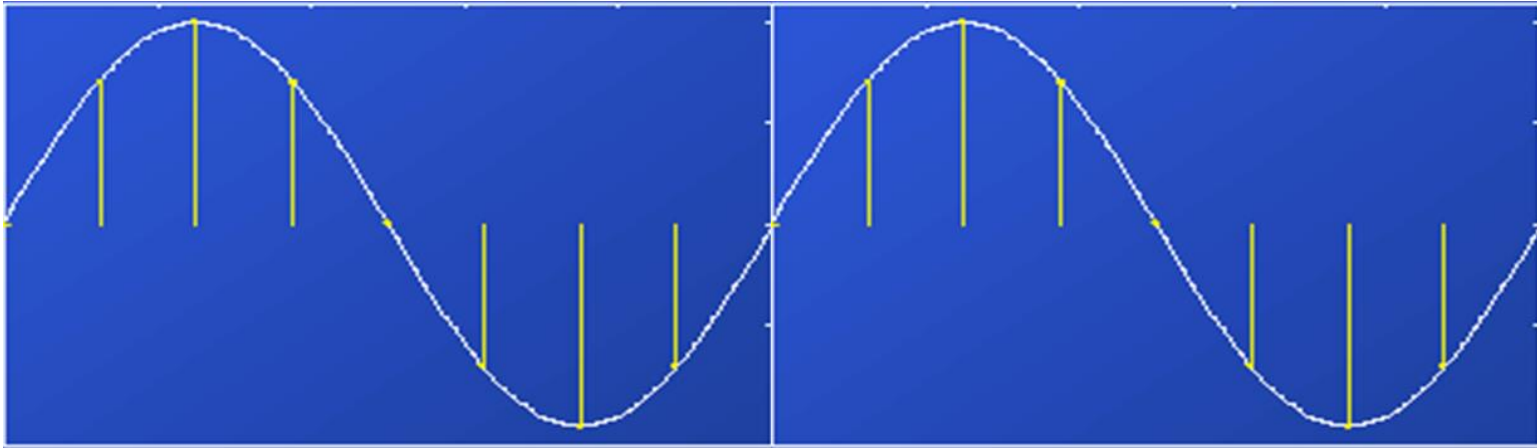
$$X[0] = \sum_{n=0}^7 x[n] = 0$$

$$X[1] = \sum_{n=0}^7 x[n] e^{-j2\pi n/8} = -4j$$

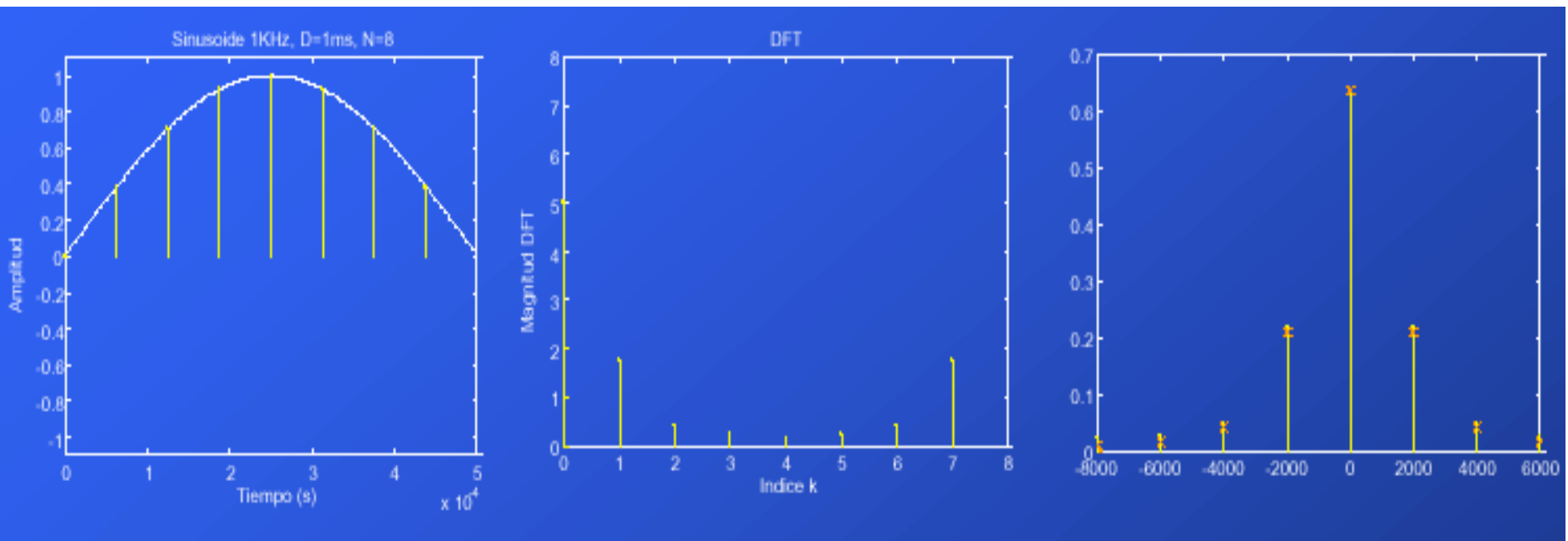
$$X[2] = X[3] = X[4] = X[5] = X[6] = 0$$

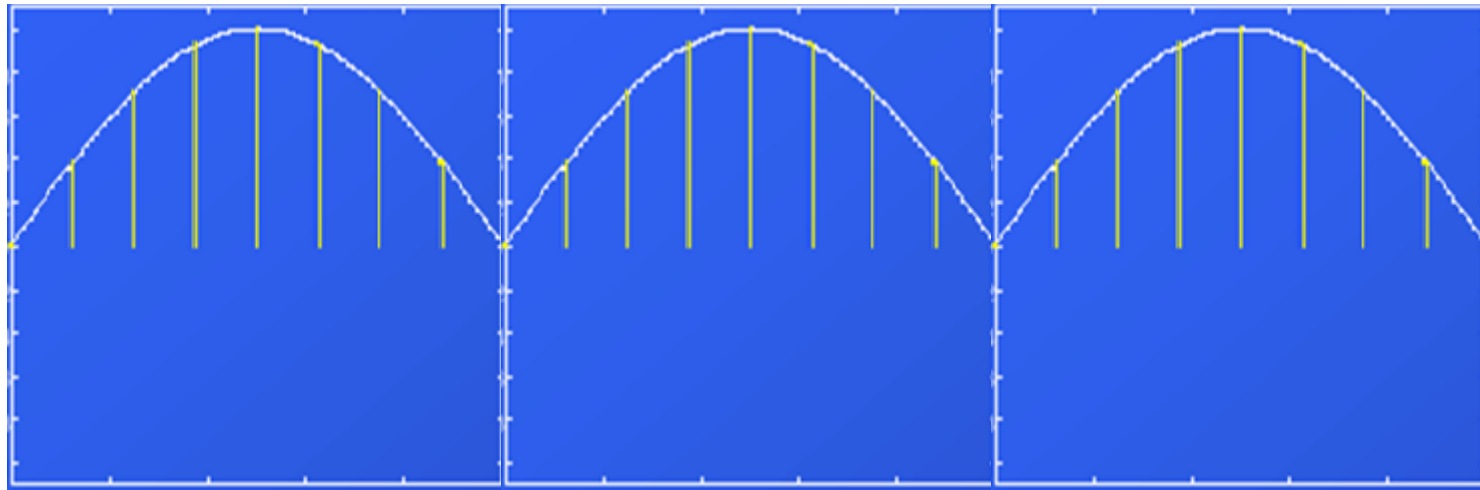
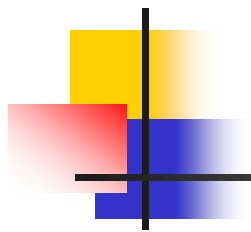
$$X[7] = 4j$$



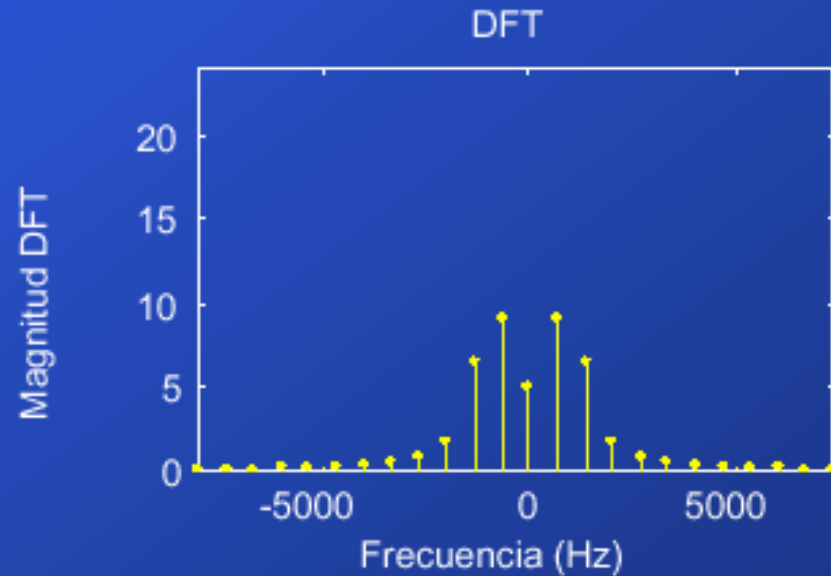
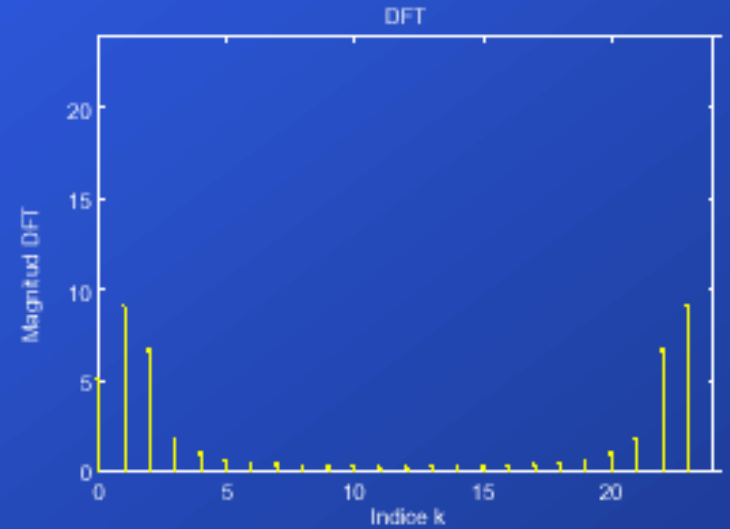
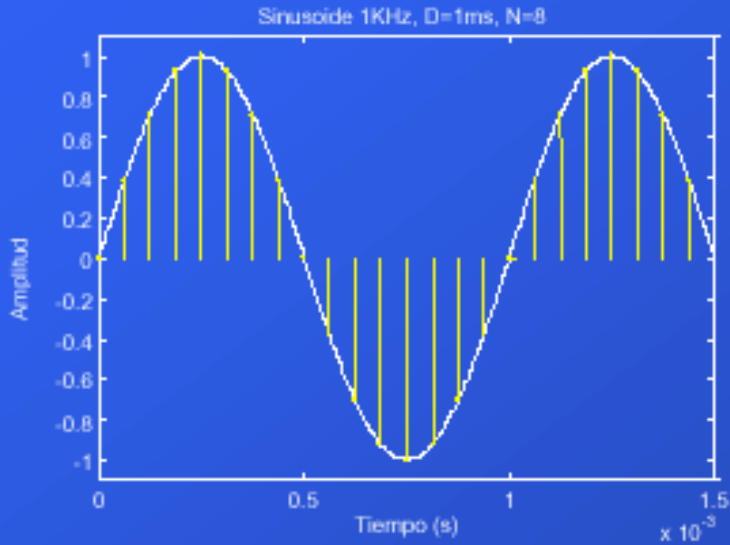


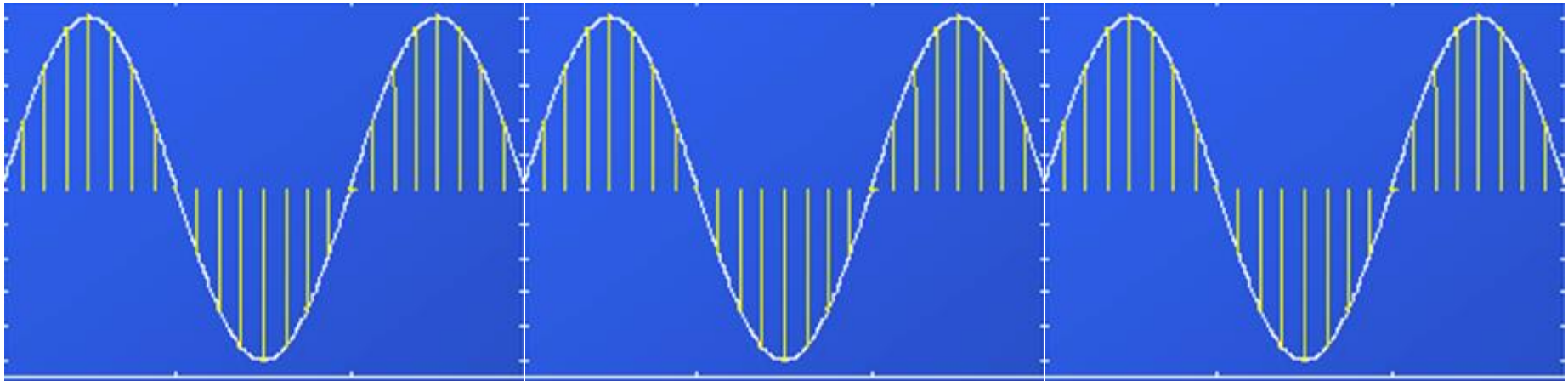
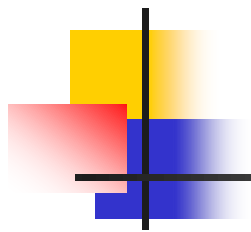
Ahora $f=1\text{kHz}$ $D=0.5\text{mSeg}$ $N=8$

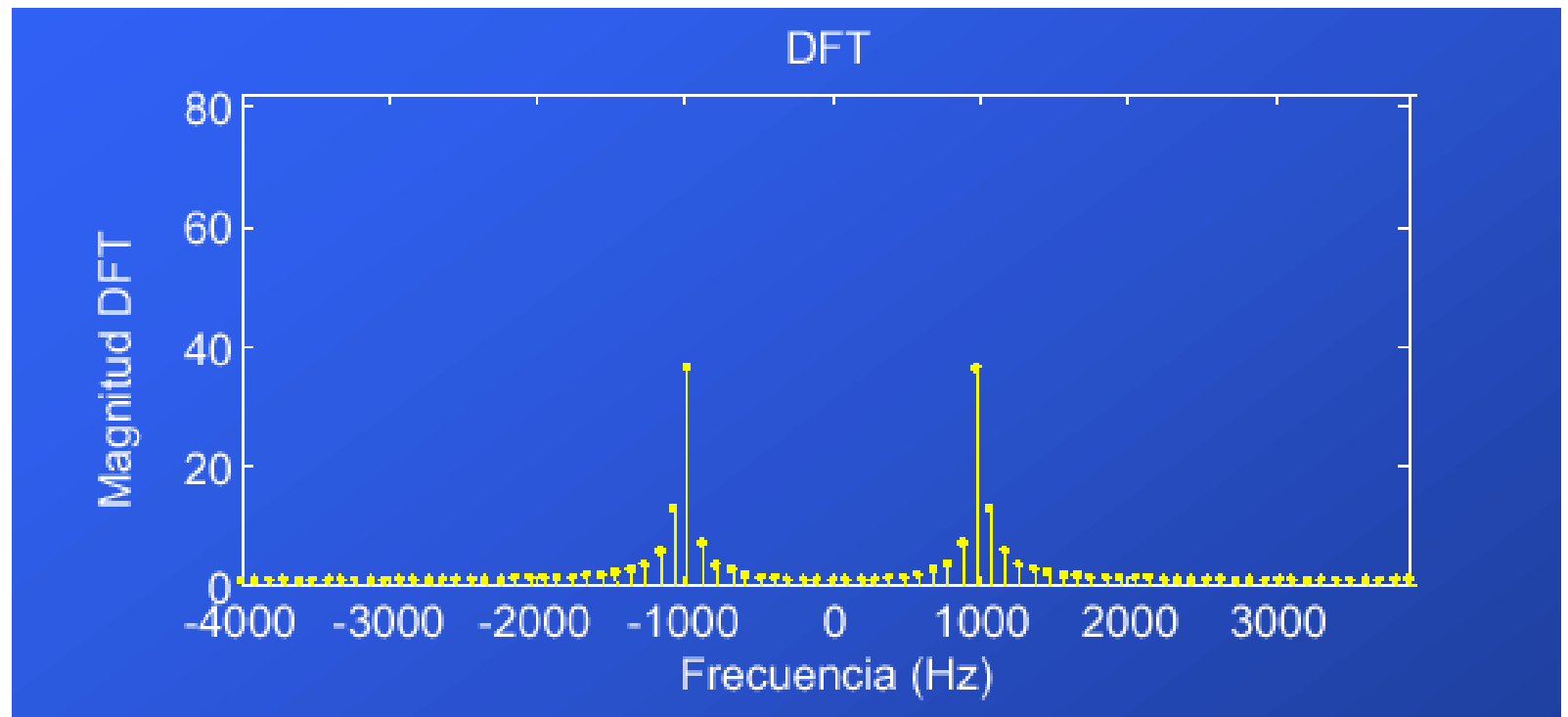
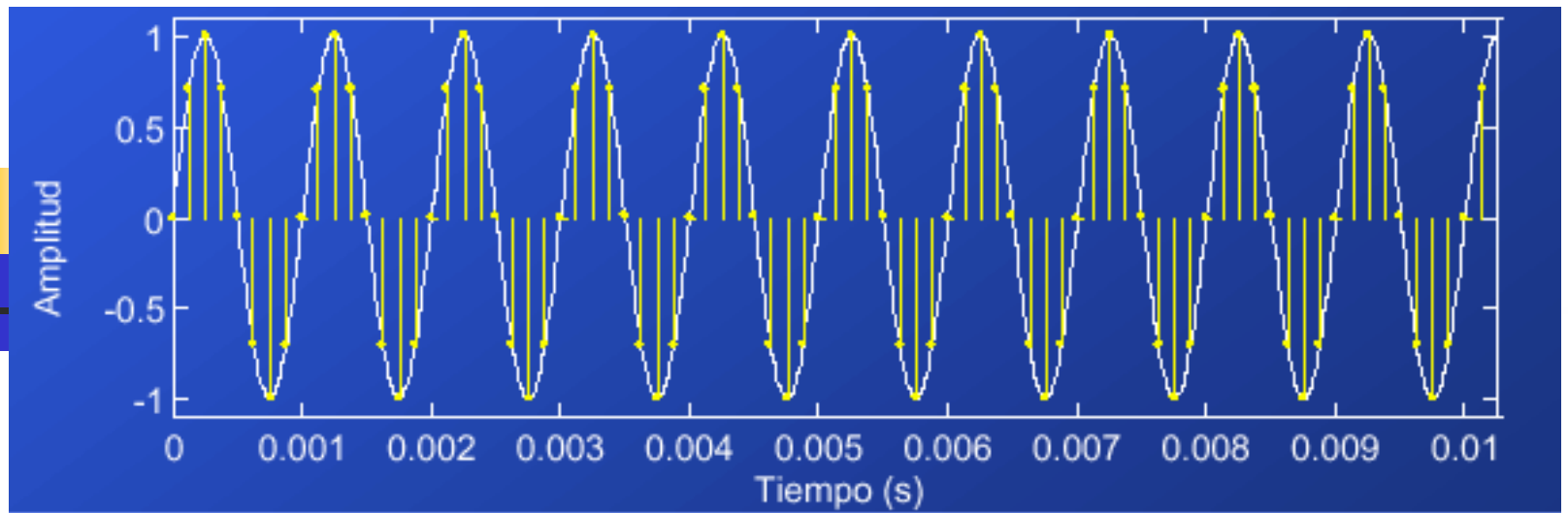




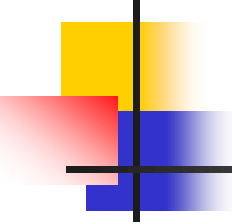
D=1.5 mSeg N=24





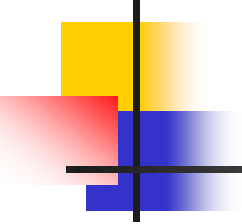


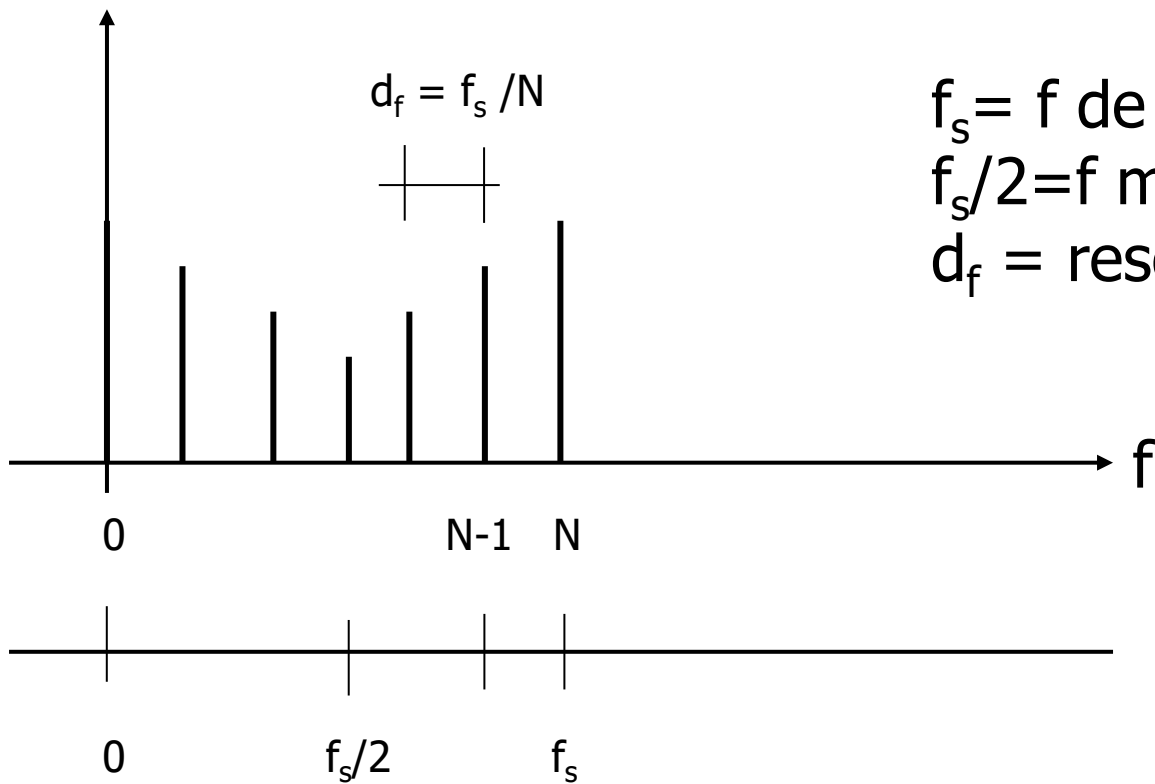
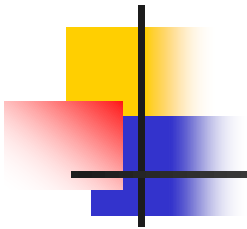
- ❑ En general, el DFT es una aproximación a las series o a la transformada de Fourier. Es muy importante elegir correctamente los parámetros del DFT (frecuencia de muestreo $f_s = 1/t_s$, resolución de frecuencia $f_0 = 1/D$).
- ❑ La frecuencia de muestreo se determina a partir del teorema de muestreo. Si queremos detectar el espectro de una señal hasta una máxima frecuencia B , la frecuencia de muestreo deberá ser $2B$.
- ❑ La duración del muestreo se elige para una determinada resolución de frecuencia.
- ❑ Una regla de diseño muy útil es: Si queremos los M primeros armónicos de una señal con un error máximo del 5%, el número de muestreos $N = 8M$.



Para entender que se calcula cuando usamos fft.....

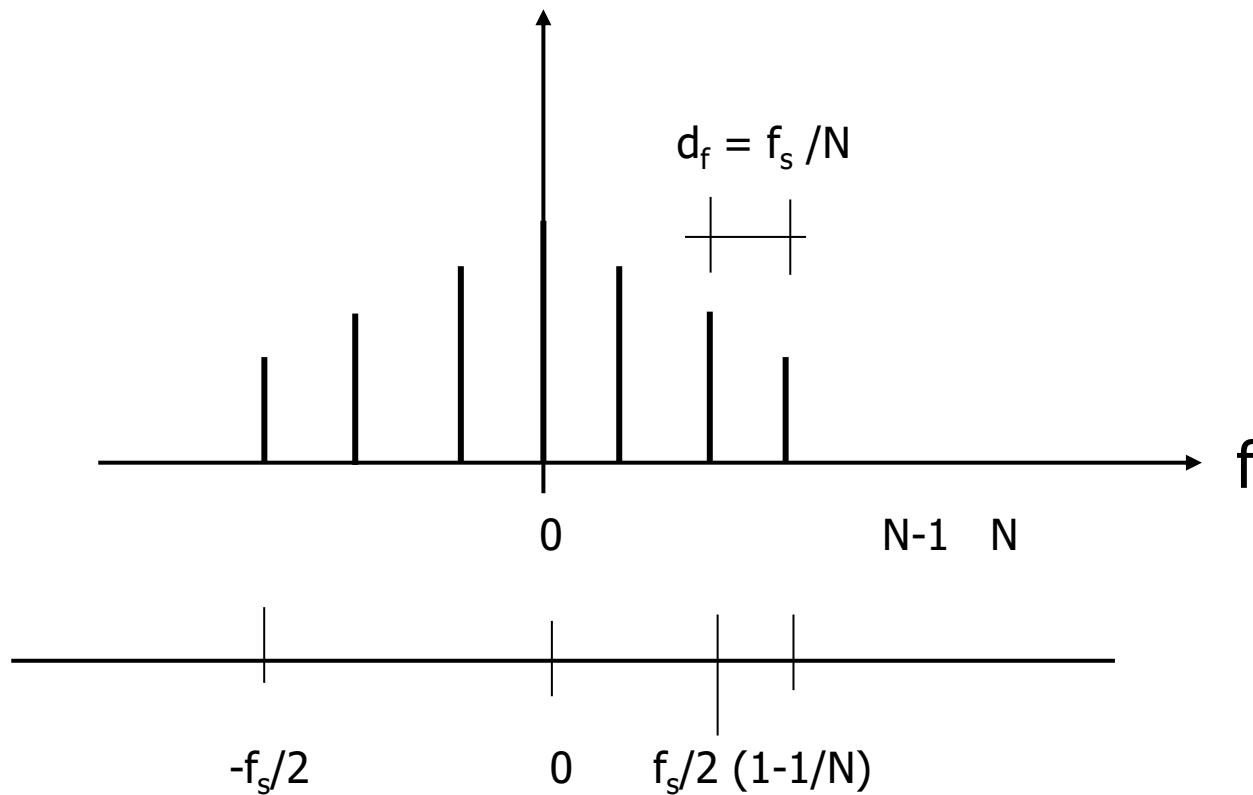
- $F = \text{fft}(x) \rightarrow x$ es un vector con las muestras de $x[n]$ para $n=0,1,2,\dots,N-1$. N muestras en total.
- Los valores calculados son $F(k)$ para $k=0,1,\dots,N-1$, que podemos interpretarlos como los valores (muestras) de $F(e^{j\omega})$ para las frecuencias discretas $\omega_k = 2\pi k/N$
- Así definida la frecuencia varía entre 0 y 2π . Para definirla entre $-\pi$ y π hay que restarle π al rango anterior.

- 
-
- Este cambio de escala requiere el correspondiente desplazamiento del módulo y fase de la transformada. La función que hace esto es `fftshift`.
 - Recordar ppt que relaciona las frecuencias analógicas y las digitales.



$f_s = f$ de muestreo
 $f_s/2 = f$ máxima con significado
 $d_f =$ resolución en frecuencia

Corrección del espectro





Todo junto.....para fft

- 1) Conocer la $f_{\text{máx}}$ de la señal y así elegir la f de muestreo. La cantidad de puntos N en general es una potencia de 2: 256, 512, 1024.....
- 2) $f_s \geq 2 f_{\text{máx}}$ frecuencia de muestreo
 $df = f_s/N$ resolución en frecuencia
- 3) $t_s = 1/f_s$ período de muestreo temporal
 $T = N t_s$ espacio muestral
- 4) $0 : t_s : T(1 - 1/N)$ eje temporal
- 5) $- f_s/2 : df : f_s/2 (1 - 1/N)$ eje frecuencial